



W. V. Duisberg Sculpsit.

HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNE'E M. DCCX.

Avec les Memoires de Mathematique & de Physique, pour la même Année.

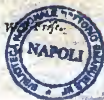
Tirez des Registres de cette Academie.



A AMSTERDAM,
Chez PIERRE DE COUP, Marchand Libraire dans le Kalverstraat.

M. DCCXIII.

Avec Privilege de N. S. les Etats de Hollande & de W[...]







A MONSIEUR
FOSS

Docteur en Medecine & Professeur Royal, dans l'Academie de Coppenhague.

MONSIEUR,

JE me flatte que Vous ne trouverez pas mauvais, que je prenne la liberté
* de

de Vous dédier ce Volume de *l'Hiſtoire de l'Academie Royale des Sciences.* La matiere, dont il traite, eſt ſi utile & ſi intéreſſante, pour ceux qui ſe plaiſent aux recherches de Phyſique & de Medecine, auſſi bien qu'à celles de Mathematique; que je vois que Meſſieurs nos Médecins l'approuvent extrémement; pour ne rien dire de ceux du reſte de l'Europe, qui n'en parlent pas avec moins d'eſtime

time, que ceux de ce païs. Je ne doute point qu'il ne ſoit auſſi de Vôtre goût.

Vôtre ſavoir dans la Médecine & la réputation, que Vous avez acquiſe même en ce païs, lorſque Vous y demeuriez, Vous ont fait appeller, avec juſtice, à la Profeſſion en Médecine dans l'Univerſité de Coppenhague; & il n'eſt pas poſſible, que Vous ne goûtiez un Recueuil, qui a l'approbation géne-

nerale. C'eſt çe qui m'a fait prendre la hardieſſe de Vous offrir ce Volume, pour Vous donner une marque de mon reſpect. Je ſuis

MONSIEUR,

Vôtre très-humble & très-obeïſſant Serviteur

PIERRE DE COUP.

PRIVILEGIE.

DE Staten van Hollandt ende West-vriesland, *Doen te weeten*, Also Ons vertoont is by GERRIT KUYPER, Boekverkooper tot Amsteldam, hoe dat hy Suppliant besig was met groote koste en veele moeyte te drukken seecker boek genaamt *Historia Academiæ Regiæ Scientiarum Auctore J. B. du Hamel & Histoire de l'Academie Royale des Sciences, avec les Memoires de Mathematique & de Physique, tirez des Registres de cette Academie, commencée avec l'Année* 1699. met alle de volgende Deelen en Figuren, in soo veel Deelen, Taalen en Formate als de Suppliant sal goet vinden: Ende de Suppliant beducht zynde dat sommige baatsoekende menschen, soo ras het Boeck soude zyn in 't licht gebragt, aanstonts souden tragten naar te drucken, ofte doen drucken, tot groote schade van de Suppliant, Soo dan omme daar inne te weesen gesecureert, soo keerde sig den Suppliant tot Ons, versoekende ten eynde Wy aan hem gunstelyck geliefden te verleenen Octroy omme het voorsz. Boek, genaamt *Historia Academiæ Regiæ Scientiarum Auctore J. B. du Hamel & Histoire de l'Academie Royale des Sciences, avec les Memoires de Mathematique & de Physique, tirez des Registres de cette Academie, commencée avec l'Année* 1699. met alle de volgende Deelen en Figuren, en in soo veel Deelen en Taalen, en in sulcken formaat, als by den Suppliant soude goet gevonden werden, voor den tyd van Vyftien eerst agter een volgende Jaaren, alleen ende met uytsluitinge van alle anderen binnen deese Provintie te moogen drucken, doen drucken, ende verkopen; Ende op soodanige Pœne als Wy daar toe soude gelieven te statueren; SOO IS 'T, dat Wy de zaake en 't verzoek voorschreeve overgemerkt hebbende, ende geneegen weezende ter beede van den Suppliant, uit Onze regte weetenschap, souveraine maght, ende authoriteyt, den selve Suppliant geconsenteert, geaccordeert ende geoctroyeert hebben; consenteeren, accordeeren, ende octroyeeren hem mits desen, dat hy geduurende den tyd van Vyftien eerst agter een volgende Jaaren het voorsz. Boek, genaamt *Historia Academiæ Regiæ Scientiarum Auctore J. B. du Hamel & Histoire de l'Academie Royale des Sciences, avec les Memoires de Mathematique & de Physique tirez des Registres de cette Academie, commencée avec l'Année* 1699. doen drucken, binnen den voorschreeven Onzen Lande alleen zal mogen drukken, met alle de volgende Deelen en Figuren, en in soo veel Deelen en Taalen en Formate, als den Suppliant sal goed vinden uitgeven ende verkopen; Verbiedende daarom allen ende een yegelyken het selve Boeck, in 't geheel ofte ten deel naar te drucken, ofte elders naar gedrukt, binnen den selven Onzen Lande te brengen, uyt te geeven, ofte te verkoopen, op

de verbeurte van alle naargedrukte, ingebragte ofte verkogte Exemplaaren, ende een boete van drie hondert guldens daar en boven te verbeuren, te appliceeren een derde part voor den Officier die de calange doen zal, een derde part voor den Armen der plaatse daar het casus voorvallen zal, ende het resteerende derde part voor den Suppliant. Alles in dien verstande, dat Wy den Suppliant met deesen Onzen Octroye alleen willende gratificeeren tot verhoedinge van zyne schaade door het naardrukken van het voorschreeve Boeck, daar door in geenigen deele verstaan den inhouden van dien te authoriseeren ofte te advoueeren, ende veel min dezelve onder onze Protectie ende beschberminge eenig meerder Credit, Aansien ofte Reputatie te geeven; nemaar den Suppliant in cas daar inne iets onbehoorlyks zoude mogen influeeren, alle het zelve tot zynen lasten sal gehouden weesen, te verantwoorden; tot dien eynde wel expresselyk begeerende dat by aldien hy deezen Onzen Octroye voor het zelve zal willen stellen, daar van geene geabrevieerde ofte gecontraheerde mentie zal mogen maaken, nemaar gehouden zal weezen het zelve Octroy in 't geheel en zonder eenige omissie daar voor te drukken ofte te doen drukken, Ende dat hy gehouden zal zyn een Exemplaar van het voorschreeve Boeck gebonden ende wel geconditioneert te brengen in de Bibliotheeq van onze Universiteyt tot Leyden, en de daar van behoorlyk te doen blyken. Alles op pœne van het effect van dien te verliesen. Ende ten eynde den Suppliant deezen Onzen Consente ende Octroye mogen genieten als naar behooren; Lasten wy allen ende een yegelyken dat zy den Suppliant van den inhoude van deezen doen laaten ende gedogen, rustelyk, vredelyk ende volkomentlyk genieten ende gebruyken; cesserende alle belet en wederleggen ter contrarie. Gedaan in den Hage onder Onze grooten Zegele, hier aan gehangen op den twee en twintigsten January, in 't Jaar onses Heeren ende Zaligmaakers seventien hondert en ses.

A. Heinsius.

Ter Ordonnantie van de Staten

SIMON van BEAUMONT.

AVERTISSEMENT AUX LIBRAIRES.

La Veuve de feu Mr. Gerard Kuyper a cedé son Privilege à Mr. Pierre de Coup, suivant l'Accord fait entr'eux.

T A-

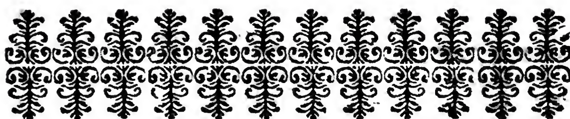


TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

ARITHMETIQUE.

ALGEBRE.

GEO-

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

CATOPTRIQUE.

DIOPTRIQUE.

MECHANIQUE.



T A-



TABLE

POUR

LES MEMOIRES.

Fin des Tables.

Faute à corriger dans les Memoires de 1707.

Pag. 293. lig. 8. au lieu de oa^5 il faut $10a^5t$.

Avis au Relieur.

Le Relieur prendra garde que le papier blanc qui eſt à côté des Figures doit être conſervé pour faire déborder les Figures hors du Livre.

Den Boekbinder zy gewaarſchouwt het papier ter zyde de Figure niet af te ſnyden : maar zoodanig in te ſetten, dat de ſelve buiten het Boek uitſlaan.

HISTOIRE

HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCC. X.



PHYSIQUE GENERALE.

SUR LE RESSORT DE L'AIR.



OMME le Ressort de l'Air est presentement fort établi, * M. *Carré* a voulu verifier des experiences de M. *Parent* qui l'attaquoient, rapportées dans l'Hist de 1708 *. Nous y avons dit que des Phioles de verre mises sur des charbons ardents, ne faisoient que se fondre doucement quand elles étoient pleines d'air, & que quand elles en avoient été bien vuidées, & qu'elles contenoient seulement un peu de quelque autre matiere, elles sautoient en éclats avec un grand bruit, ce qui paroît assez contraire à l'idée que l'on a de la grande force élastique de l'Air.

* V. les M. p. 1. † p. 22.

M. *Carré* ayant refait ces experiences sur un grand nombre de Phioles, a trouvé que presque toûjours dans l'un & dans l'autre cas elles crevoient ou s'éclatoient avec bruit, & que par conséquent on n'en pouvoit rien conclure contre le Ressort de l'Air, car il faudroit pour cela que les deux cas eussent un succès contraire; c'est-à-dire que les Phioles ne crevassent avec bruit que quand elles ont été vuidées d'air.

Si elles ne contiennent ni air ni aucune autre matiere, il arrive quelquefois que l'hemisphere inferieur de la Phiole, & celui qui pose sur les Charbons, s'amolissant par le feu & se fondant à demi, va s'appliquer contre la surface interieure de l'hemisphere superieur, de sorte que la boule se change en un hemisphere creux en forme de Tasse. C'est que la boule vuide d'air ne peut résister à la pression de l'air exterieur, qui fait rentrer une de ses moitiés. Cet effet est si naturel qu'il sembleroit devoir toûjours arriver, mais cette moitié de boule ne se fond pas toûjours si également en toutes ses parties au degré qu'il faut; dès qu'il y en a quelqu'une trop fonduë, elle se détache des autres, & il se fait un trou par où entre l'air exterieur, qui ne laisse plus de lieu à ce petit phenomene. Si dans la Phiole vuide d'air il y a quelque peu d'une autre matiere, comme de l'Eau, de l'Esprit de vin, &c. cette matiere se rarefie, & se fait bien-tôt une ouverture pour sortir.

Quelquefois, comme M. *Carré* l'a vû dans quelqu'une de ses experiences, aussi-bien que M. *Parent*, l'air s'échape d'une Phiole paisi-

ble-

blement & sans bruit. Mais alors ce n'est pas à dire qu'il n'ait point de ressort, il suffit pour rendre sa sortie tranquille qu'il ait trouvé une ouverture proportionnée à sa vitesse.

Enfin le ressort de l'air a paru à M. *Carré* subsister en son entier. Ce n'est pas que les experiences qu'il a faites pour s'éclaircir ne lui produisissent elles-mêmes de nouvelles difcultés, mais il s'en fait dans les matieres de Physique une regeneration continuelle, qu'il ne faut pas prétendre épuiser entierement.



SUR LA DECLINAISON

DE L'AIMAN.

LA beauté & l'importance du Systême de M. *Halley* ne permettent pas que l'on se relâche sur le soin de le verifier

* M. *Delisle* ayant eu entre les mains 10 Journaux de Voyages de long cours faits en 1706, 7, 8, & 9, a trouvé par les variations de l'Aiguille qui y avoient été observées, que cette Ligne courbe exempte de variation, tracée par M. *Halley* sur le Globe terrestre, avance toûjours vers l'Oüest à nôtre égard, selon ce que nous avions déja dit dans l'Hist. de 1706 ‡. Cela suit évidemment de ce que les Vaisseaux qui vont de *France* en *Amerique* observent en deçà de cette Ligne que la variation qui est Nord-Oüest est plus grande que celle de M. *Hal-*

* V. les M. p. 469. ‡ p. 4.

Halley, & * plus petite au delà où elle est Nord-Est, & d'autant plus differente que l'année où se fait la Navigation est plus éloignée de 1700, époque de la Carte de M. *Halley*. Ce n'est pas que toutes les observations particulieres donnent une regularité si parfaite, elle ne résulte que du gros des observations, il n'est pas possible qu'il n'y en ait quantité de fautives, & d'ailleurs le mouvement de cette Ligne supposée pourroit bien n'être pas lui-même fort regulier.

Par les voyages que M. *Delisle* a vûs, les variations observées du Cap de *Bonne-Esperance* aux *Indes Orientales* different si peu de celles de M. *Halley*, que l'on peut compter que de ce côté-là tout est presque dans le même état; ce qui pourroit faire naître quelque difficulté dans le Systême général, car il seroit bon que les changemens de l'Orient répondissent à ceux de l'Occident.

Ce que M. *Cassini* le fils avoit déja commencé à l'égard de la Mer du Sud *, qui manque à la Carte de M. *Halley*, M. *Delisle* l'a poursuivi, il a donné de nouvelles observations de la variation de l'Aiguille, faites sur cette Mer. Il confirme ce qu'avoit remarqué M. *Cassini* le fils, que dans ces parages la variation augmentoit avec la latitude meridionale, & il y ajoûte que sous une même latitude la variation diminuoit à mesure qu'on s'éloignoit en longitude vers l'Occident.

Il n'a pas manqué d'examiner avec grand soin les observations d'un Vaisseau, qui pour la premiere fois, que l'on sache, a été du Dé-

troit

* V. l'Hist. de 1708. p. 24.

troit de *Magellan* au Cap de *Bonne-Esperance*. Ce qui en résulte commence par s'éloigner assez de la Carte de M. *Halley*, & y revient ensuite. Mais dans une matiere aussi nouvelle & aussi délicate, il ne faut pas s'attendre que toutes les observations conspirent si promptement en faveur d'un Systême.

M. *Delisle* a tiré encore de ses Journaux quelques remarques Geographiques, importantes pour la Navigation.



SUR LE FLUX

ET LE REFLUX.

* LE Memoire circulaire sur le Flux & le Reflux envoyé par ordre de M. le Comte de *Pontchartrain* dans les Ports de l'Ocean, & dont il a été parlé dans l'Hist. de 1701 ‡, a déja eu une partie de son effet.

Mrs *Baërt* & *du Bocage*, Professeurs en Hydrographie, le premier à *Dunquerque*, & le second au *Havre de Grace*, ont envoyé à l'Academie le Journal des observations qu'ils ont faites, chacun dans son Port, pendant plus d'une année en 1701 & 1702. M. *Cassini* le fils a examiné ces deux Journaux, & en a fait les Résultats.

Ce que nous avons dit en 1701 se confirme. *On pourroit plûtôt se flater d'avoir le Systême du Flux & du Reflux, que s'assurer d'avoir les Phenomenes avec assez d'exactitude.*

* V. les M. p. 427. 486. & 500. ‡ p. 15. & suiv.

On apprend des faits nouveaux & importants, mais tout s'accommode assez bien avec la pression de la Lune sur l'Ocean, imaginée par M. *Descartes*.

Ce n'est pas que cette pression n'ait de grandes difficultés. Comment concevoir seulement qu'elle se fasse? La Lune est dans le Tourbillon de la Terre, comme y seroit un volume égal de la matiere céleste dans laquelle elle nage, elle y est en équilibre, & en vertu dequoi presse-t-elle? Quand même elle entreroit pour la premiere fois dans le Tourbillon de la Terre, & y entreroit de force, il n'arriveroit autre chose sinon que dans toute l'étenduë de ce Tourbillon la matiere qui le remplit se condenseroit également, & uniformément, autant qu'il seroit necessaire pour faire place à la Lune, & par conséquent il ne feroit pas une plus grande pression sur l'étenduë de l'Ocean qui répond à la route de cette Planete, que partout ailleurs; cependant l'inégalité de pression est necessaire pour abaisser les eaux entre les Tropiques, & les élever vers les deux Poles.

On pourroit peut-être rectifier cette idée en donnant à la Lune un Tourbillon particulier, qui comme le Tourbillon général de la Terre tourneroit d'Occident en Orient, & dont par conséquent la moitié inferieure iroit à l'égard de la Terre d'Orient en Occident. Le mouvement de la matiere qui composeroit cette moitié seroit donc opposé au mouvement de la matiere du Tourbillon general de la Terre, & delà il suit que celle qui devroit passer sous la Lune, toûjours en même quan-

quantité, étant retardée par cette espece d'obstacle qu'elle trouveroit, & pressée entre la Lune & la Terre, presseroit réciproquement l'une & l'autre, & par consequent enfonceroit les eaux de l'Ocean qui seroient au dessous d'elle.

Que cette Hypothese soit recevable ou non, il n'importe. Seulement il est bon de se faire cette image, ou quelque autre semblable pour entrer plus facilement dans les Phenomenes du Flux & du Reflux, qui paroissent fort liés avec le mouvement de la Lune.

Comme l'enfoncement des Eaux se fait entre les Tropiques, elles prennent en s'élevant vers les Poles un mouvement qui ne peut être que successif. Delà il suit & que dans nôtre Hemisphere septentrional elles arrivent plutôt à une Côte moins septentrionale qu'à une qui l'est davantage, plutôt au *Havre*, par exemple, qu'à *Dunquerque*, & que dans un lieu déterminé, comme *le Havre*, le temps de la haute mer dépend du passage de la Lune par un certain Meridien, qui n'est pas pour cela le Meridien du lieu, mais celui où la Lune se trouve, lorsque les eaux dans leur plus grande hauteur arrivent à ce lieu-là. Il est manifeste que ce Meridien est toûjours le même, & puisque le passage de la Lune par un Meridien quelconque retarde tous les jours de 49′ à peu près, il faut que les Marées en quelque lieu que ce soit retardent autant.

On sait depuis long-temps que les plus grandes Marées, c'est-à-dire celles où la Mer monte le plus haut, sont vers les Nouvelles & Pleines Lunes, & les plus petites vers les

Quadratures. Si l'on veut se faire quelque idée de la cause, on peut s'imaginer que ce Tourbillon supposé de la Lune est elliptique, comme le grand Tourbillon du Soleil & que dans les Conjonctions & Oppositions son plus grand diametre passe à peu près par le centre de la Terre, & que dans les Quadratures c'est le petit. Cela rendra la pression de la matiere céleste sous le Tourbillon de la Lune plus grande dans un temps que dans un autre.

Pour avoir un point fixe d'où l'on compte dans un certain lieu le retardement de la Marée pour tous les jours d'une Lunaison, on prend le temps de la haute mer de la Nouvelle ou Pleine Lune. Mais ce temps par plusieurs raisons n'est pas précisément le même d'une Lunaison à l'autre.

1°. Ce n'est pas le retour de la Lune à la même Phase de Conjonction ou d'Opposition, mais c'est son retour à un certain Meridien à la même heure, qui fait le retour de la Marée à la même heure dans un certain lieu. Si donc dans une seconde Lunaison la Lune est revenuë à la même Phase avant que d'être revenuë à ce Meridien, la haute mer de cette Lunaison doit arriver plus tard que celle de la premiere, & si c'est le contraire, elle arrivera plutôt.

2°. Quelques causes particulieres, & principalement le Vent, avancent ou retardent les Marées. Si la direction du Vent concourt avec celle du mouvement de l'eau, elle en doit aller plus vîte, sans compter qu'elle s'élevera aussi plus haut. S'il arrive des changemens dans la disposition du fond de la Mer, il

il en pourra arriver auſſi dans la Marée, qui trouvera une nouvelle facilité, ou un nouvel obſtacle. Les irrégularités de la Marée d'un lieu peuvent influer ſur celle d'un autre, & tout cela enſemble ſe combinera de mille manieres differentes.

Il y a donc de la variation dans le temps de la Marée d'un certain lieu à la même Phaſe de la Lune. Par les obſervations du *Havre* & de *Dunquerque* M. *Caſſini* le fils a trouvé que cette variation y eſt d'une heure dans les Pleines Lunes, & prenant un temps moyen il a fixé celui de la haute mer au *Havre* dans la Pleine Lune à 9 heures du matin 26′, & à *Dunquerque* à 11h 54′ du matin.

Ces deux temps ſeroient toûjours ceux de la haute mer pour ces deux Ports dans les oppoſitions, ſi effectivement la Lune au moment de ſon oppoſition paſſoit toûjours à ces heures-là par les Meridiens d'où la marée de ces deux Ports dépend. Mais il s'en faut bien que cela ſoit ainſi. Suppoſons qu'à *Dunquerque* où la haute mer arrive près de Midi, ou, ce qui eſt la même choſe, près de Minuit, le Meridien d'où la marée dépend ſoit le Meridien même de *Dunquerque*, car cela reviendra toûjours au même. La Lune peut être pleine lorſqu'il ſera 6 heures du ſoir à *Dunquerque*, & cependant elle ne peut paſſer par le Meridien de cette Ville que vers minuit. La haute mer qui dépend de ce paſſage tardera donc par rapport à l'heure qui a été fixée pour les Pleines Lunes, & par conſéquent arrivera plus tard que minuit. Mais de combien ſera ce retardement? Il doit être

proportionné au temps dont la Pleine Lune a précedé minuit, & de plus comme c'eſt le retardement du paſſage de la Lune par un Meridien déterminé, M. *Caſſini* le prend pour le même que celui de 49′ dont la Lune revient tous les jours plus tard au même Meridien. Ces 49′ donnent 2′ par heure, & puiſque dans l'exemple propoſé la Pleine Lune a précedé minuit de 6h, la haute mer n'arrivera à *Dunquerque* qu'à minuit 12′. Ce ſera la même choſe, mais renverſée, ſi la Pleine Lune arrive après minuit.

Par cette regle, M. *Caſſini* trouve le temps vrai de la haute mer dans les Nouvelles ou Pleines Lunes pour tous les Lieux où l'on aura déterminé par obſervation le temps moyen. Mais il faut bien remarquer que cette regle pour le temps vrai ne remedie qu'à l'irrégularité aſtronomique, qui vient du mouvement de la Lune, mais non pas aux irrégularités phyſiques dont nous avons parlé. Elles ne peuvent être aſſujetties à aucune regle, & par-là le calcul de M. *Caſſini*, quoiqu'il approche plus près du vrai que ceux qu'on faiſoit auparavant, s'en éloigne toûjours un peu, ou ne s'y rencontre juſte que par une eſpece de bonheur.

La plûpart croyoient que les plus grandes marées arrivoient aux environs des Nouvelles ou Pleines Lunes, c'eſt-à-dire quelques jours avant ou après, mais M. *Caſſini* a remarqué qu'elles n'arrivent qu'après, du moins au *Havre* & à *Dunquerque*, & il a déterminé le temps moyen à deux jours.

De même le temps moyen des plus petites marées eſt deux jours après les Quadratures.

Des

Des Nouvelles ou Pleines Lunes aux Quadratures le retardement journalier des marées est plus petit que des Quadratures aux Nouvelles ou Pleines Lunes. La raison en est, selon M. *Cassini*, que depuis les Quadratures la pression qui éleve la Mer l'éleve tous les jours davantage, ce qui est plus difficile à cause du poids des eaux, & demande plus de temps.

On est persuadé communément que comme les plus grandes marées d'une Lunaison ou d'un Mois sont celles des Nouvelles ou Pleines Lunes, les plus grandes d'une Année sont celles des Equinoxes ou des environs. Cela ne se trouve pas vrai par les observations presentes. Mais ce qui est très-considerable, & que M. *Cassini* a bien remarqué, c'est que la grandeur des marées a toûjours rapport au plus ou au moins de distance de la Lune à la Terre. Plus cette distance est grande, plus la marée est petite, tout le reste étant égal. Rien ne convient mieux à l'hypothese du Tourbillon de la Lune. Plus la Lune, ou ce Tourbillon dont elle est le centre, est proche de la Terre, plus le passage de la matiere céleste est rétreci, & sa pression augmentée.

Il y a donc dans le Systême du Tourbillon deux principes qui se combinent ensemble pour la grandeur des marées, la proximité de ce Tourbillon à la Terre qui varie dans tout le cours d'une Lunaison, & la perpendicularité de son grand Axe à la Terre qui est attachée aux Nouvelles & Pleines Lunes. Delà il est aisé de tirer les conséquences. La marée d'une Quadrature où la Lune aura été

dans ſon Perigée, peut être auſſi grande que celle d'une Conjonction ou d'une Oppoſition où la Lune aura été dans ſon Apogée, &c. Ces conſéquences ſont des faits conſtants par les obſervations, & indépendants de toute hypotheſe.

Voilà les principaux fondements ſur leſquels M. *Caſſini* établit de nouvelles Regles pour déterminer à quelque jour que ce ſoit l'heure de la marée dans les Ports du *Havre* & de *Dunquerque*, & ces Regles, plus ſûres que les anciennes, ſerviront en même temps de modeles à l'égard des autres Ports où l'on aura fait les mêmes obſervations. Le ſalut ou la perte d'un Vaiſſeau, & même d'une Armée navale, dépend quelquefois de la connoiſſance de l'heure de la marée dans un Port ; il faut ſavoir ſi l'on y peut entrer ou en ſortir. L'incertitude de quelques Minutes, que laiſſent les Regles, ne peut être préjudiciable.

M. *Caſſini* pour embraſſer cette matiere dans la plus grande étenduë qu'il lui étoit poſſible, a comparé aux obſervations du *Havre* & de *Dunquerque* celles qui furent faites il y a pluſieurs années à *Breſt* & à *Dunquerque* par Mrs *de la Hire* & *Picard*. Il confirme ce qu'ils avoient avancé, que les marées ont plus de rapport au moyen mouvement de la Lune qu'au vrai, car aſſez ſouvent quand le mouvement vrai retarde à l'égard du moyen, la marée avance, & au contraire. Du reſte, il ſe trouve que les Regles de M. *Caſſini* pour le *Havre* & pour *Dunquerque* s'appliquent très-facilement & très-heureuſement aux obſervations de *Breſt* & de *Bayonne*, de ſorte qu'on

qu'on aperçoit déja quelque chose d'assez général sur le Flux & le Reflux. Le temps nous dévelopera le reste.



SUR LE MOUVEMENT PROGRESSIF DE PLUSIEURS ESPECES DE COQUILLAGES.

* QUoique les Animaux en général ayent un besoin indispensable du mouvement progressif, soit pour aller chercher leur pâture, soit afin que les Mâles & les Femelles puissent se rencontrer, il y en a cependant quantité qui par leur figure seule en paroissent incapables; tels sont plusieurs especes de Coquillages, & c'est pour cela que M. *de Reaumur* les a observés avec beaucoup de soin, car ils pourroient, pour ainsi dire, nous dérober leur marche, & souvent un semblable fait qui n'est qu'exterieur est aussi difficile à découvrir, que la structure interieure d'une partie.

Déja feu M. *Poupart* avoit observé † que les Moules de riviere étant couchées sur le plat de leur coquille en faisoient sortir quand elles vouloient une partie, qu'on peut nommer jambe ou bras par son usage, qu'elles s'en servoient pour creuser le sable sous elles,

* V. les M. p. 573. † V. les M. de 1706. p. 7.

& par consequent baisser doucement d'un côté, de sorte qu'elles se trouvassent à la fin sur le tranchant de leur coquille, après quoi elles avançoient ce même bras le plus qu'il étoit possible, & ensuite s'appuyoient sur son extremité pour attirer leur coquille à elles, & se traîner ainsi dans une espece de rainure qu'elles formoient elles-mêmes dans le sable, & qui soûtenoit la coquille des deux côtés. A la vûë d'une Moule on ne devineroit pas cet expedient, & cette ressource de méchanique.

M. *de Reaumur* en a vû une semblable dans les Moules de Mer. Ce qu'on peut appeller leur jambe, ou leur bras, & qui dans son état naturel est long de 2 lignes, peut sortir de 2 pouces hors de la coquille, & l'Animal ayant saisi quelque endroit fixe avec ce bras si étendu le raccourcit ensuite, & par conséquent avance en se traînant.

Par une manœuvre à peu près pareille, & dont il faut laisser tout le détail à celui qui l'a découverte, le Lavignon, autre Coquillage, marche sur la vase, ou s'y enfonce. Mais M. *de Reaumur* a remarqué que s'il s'y enfonce, ce n'est qu'autant que le lui permet la longueur de deux Cornes ou Tuyaux qu'il peut pousser hors de sa coquille, & avec quoi il prend & rejette l'eau dont apparemment il a besoin pour sa respiration. Il faut que ces Cornes puissent toûjours avoir communication avec l'eau qui est au-dessus de lui, & delà vient que dans les temps mêmes où il ne les employe pas, car elles ne sont pas toujours en fonction, il y a dans la vase qui le couvre un ou deux petits trous du diame-

tre

tre de ses cornes, qui le décelent.

La longueur de ces Cornes, dans les autres Coquillages qui en ont, détermine aussi la profondeur où ils se mettent dans la boue.

L'Oeil de Bouc, qui est un Coquillage d'une seule piece, toûjours attaché à une pierre sur laquelle la circonference inferieure de la Coquille peut exactement s'appliquer, ne paroît avoir d'autre mouvement que de soulever cette Coquille de la hauteur d'une ligne, de sorte que son corps ait une circonference de cette grandeur découverte & nuë. Dès qu'on y touche, la coquille se rebaisse & le recouvre. Cependant M. *de Reaumur* a trouvé à cet Animal un mouvement progressif sur la pierre à laquelle il se colle.

L'Ortie de Mer, qui a la figure d'un Cône tronqué, est pareillement toûjours appliquée à une pierre par la plus grande base de ce Cône. Des Muscles circulaires font le plan des deux bases, & des Muscles droits vont d'une base à l'autre. Tout le jeu du mouvement progressif consiste en général en ce que toute la moitié des muscles tant circulaires que droits qui sont du côté vers lequel l'Animal veut aller, s'enfle & s'étend, & par conséquent occupe une petite partie d'une nouvelle place, tandis que l'autre moitié affaissée ou est tirée par celle qui avance, ou la pousse elle-même du même sens. Ce mouvement n'est pas plus prompt, ni plus sensible que celui d'une Aiguille d'Horloge.

Il y a une autre Ortie de Mer qui ne s'attache à rien, & c'est le plus bisarre de tous les Animaux par sa figure, & le plus singulier

par

par ſon peu de conſiſtence, puiſqu'il ſe fond entre les mains. Il ne ſeroit pas mis au nombre des Animaux ſi on ne lui voyoit un mouvement de Syſtole & de Diaſtole, ſeul ſigne de vie qu'il donne.

Enfin l'Etoile de Mer pour avoir 304 jambes à chacun des 5 rayons qui la compoſent, & qui lui ont fait donner le nom d'Etoile, n'en va pas plus vîte. Ses 1520 jambes ne lui donnent point d'avantage ſur la Moule qui n'en a qu'une. Quelle prodigieuſe varieté dans les Ouvrages de la Nature! non-ſeulement la grande viteſſe du mouvement, mais même l'extrême lenteur s'execute en differentes manieres.

SUR L'EFFET DU VENT

A L'E'GARD DU THERMOMETRE.

* QUoiqu'il n'y aït pas d'autre voïe pour parvenir aux découvertes Phyſiques que les Experiences, il ſemble qu'il ſoit en quelque ſorte dangereux d'en trop faire, parce que dans un grand nombre elles ſe détruïſent les unes les autres, & rendent les faits auſſi difficiles à établir, que les cauſes mêmes le ſont à trouver. C'eſt ce qui paroît être arrivé aux experiences que M. *de la Hire* avoit faites anciennement ſur le Thermométre, & qui ont donné occaſion à celles de M. l'Abbé *Teinturier* Archidiacre de *Verdun*, de

* V. les M. p. 719. & 721.

de M. *Caſſini* le fils, & de M. *de la Hire* le fils, qui ſe ſont ſuivies ſelon l'ordre qu'elles ſont rapportées ici. Nous en éviterons le détail, il ſeroit trop grand par la difference des circonſtances, qui toutes cependant ont part à l'effet, & nous tâcherons de ſaiſir quelques connoiſſances générales, les plus indépendantes qu'il ſe pourra de la variation perpetuelle des cas particuliers.

Il s'agit principalement de l'effet du Vent ſur le Thermometre. Si on ſouffle contre ma main avec un ſoufflet, je ſens du froid, quoique l'air pouſſé contre ma main ne ſoit pas plus froid que celui dont elle étoit environnée auparavant, mais c'eſt qu'elle étoit envelopée, auſſi-bien que le reſte de mon Corps, d'une Atmoſphere chaude formée par la tranſpiration, le ſouffle l'en dépouille, & fait que l'air exterieur plus froid que cette Atmoſphere s'applique immediatement ſur elle. Il eſt viſible que cette maniere de recevoir une impreſſion du froid n'eſt que pour les Animaux, & non pour le Thermometre. De même ſi je mets ma main dans de la nége, je ſens d'abord du froid, & enſuite du chaud, parceque des particules très-fines de la nége qui ſe fond un peu entrent dans les pores de ma peau, & s'appliquent très-exactement aux petites fibres des nerfs, mais auſſi ces mêmes particules bouchent les pores, & arrêtent la vapeur chaude qui ſortiroit ; il faut donc qu'elle s'amaſſe en un certain temps, & cauſe un plus grand ſentiment de chaleur. Cette ſucceſſion du froid & du chaud par la même cauſe n'eſt point encore pour le Thermometre.

Il

Il juge, pour ainsi dire, plus simplement que nous, mais aussi fort délicatement. S'il monte, lorsqu'on pousse de l'air contre la Boule avec un soufflet, il faut que cet air soit plus chaud que celui qui l'environnoit auparavant, quoique cela paroisse d'abord difficile à imaginer, & même ne s'offre pas trop naturellement à l'esprit. Mais le soufflet peut avoir été pris dans un lieu plus chaud que celui où étoit le Thermometre, & par conséquent échauffer l'air qu'on lui fait prendre; il peut s'échauffer lui-même par les mouvements continuels & réiterés qu'on lui donne pendant peut-être un demi quart-d'heure; la seule multitude des spectateurs qui verront l'Experience peut échauffer l'air; il peut s'échauffer même par la seule agitation que le soufflet lui donne, & ce qui le prouve, c'est qu'un Thermometre simplement agité pendant un demi quart-d'heure, monte après qu'on l'a laissé en repos. Toutes ces reflexions, qui sont de M. *de la Hire* le fils, marquent combien il est facile que les experiences ayent des succès imprévûs. Il y a même bien de l'apparence qu'on ne pense pas encore à tout.

Le Thermometre au contraire pourra descendre, si l'experience se fait dans un temps de gelée, & où l'air soit fort rempli de ces particules nitreuses, que l'on peut concevoir qui contribuënt au froid. On en fera entrer une plus grande quantité dans la liqueur. La difference des saisons peut beaucoup influer sur ces effets, & c'est-pourquoi on a dessein de faire les experiences dans les états extrêmes de l'air.

Quand

Quand on envelopera de nége la boule d'un Thermometre, il montera si la nége est moins froide que l'air, ce qui peut arriver; il descendra, si la nége, même moins froide que l'air, fait entrer dans la liqueur de nouvelles particules nitreuses jusqu'à une certaine quantité.

Que la boule du Thermometre soit plongée dans l'eau, ou couverte d'un linge ou d'un drap sec ou mouillé, le Thermometre montera ou descendra selon que son envelope agira sur lui, ou le défendra de l'action de l'air, ou la modifiera.

Que l'on souffle contre le Thermometre envelopé de ce qu'on voudra, ce n'est qu'une combinaison des experiences précedentes, susceptible par conséquent d'un grand nombre de varietés, aisées à imaginer en général, fort difficiles à prévoir en particulier.



DIVERSES OBSERVATIONS

DE PHYSIQUE GENERALE.

I.

MOnsieur *de la Hire* a appris par un Memoire qui lui a été envoyé de *Pondichery* dans l'*Inde* par le P. *Tachard* Missionnaire Jesuite en 1709, que le Verre de l'*Inde* qui n'est pas beau comme celui de la *Chine* ou du *Japon*, se fait avec une gomme d'Arbre de couleur d'Ambre blanc, ou de Karabé, qu'on fait fondre dans un quart d'Huile de Lin.

II.

II.

M. *de la Mare*, Officier de Marine, ayant apporté des *Indes Orientales*, du *Bresil* & du *Perou* plusieurs especes de Drogues, les mit entre les mains de M. *Sauveur*, qui les fit voir à l'Academie. M. *Geoffroy* se chargea de les examiner. C'étoient des Racines, des Graines, des Bois, des Pierres, &c. Il compara ces Drogues telles qu'il les voyoit, & ce qu'en disoient les Memoires de M. *de la Mare*, avec ce qu'en ont dit les Auteurs qui ont traité de ces matieres, & par-là il tâcha à reconnoître si ce qu'il avoit devant les yeux étoit ce que ces Auteurs ont décrit. Nous supprimons la principale partie de l'Ouvrage, quoique recherchée avec beaucoup de soin, mais qui n'étoit que de pure érudition, & nous en détacherons seulement ici, & dans quelque autre endroit ce qui appartient à la Physique.

Il y a à la Côte de *Coromandel* un Arbre assez semblable à nos Chênes, qui porte une espece de Gland, dont on tire de l'Huile comme l'Huile d'Olive. Les *Malabars* s'en servent dans leurs Aliments, pour brûler, & pour teindre leurs Toiles. M. *de la Mare* à leur exemple en mangeoit en salade, & en friture avec du Poisson, & il avoit appris à en manger à tous les autres Officiers de la Côte, qui s'en trouvoient fort bien.

III.

Les Noix qu'on appelle Bicuiba brûlent comme du linge imbibé de poix, & c'est en les brûlant qu'on en tire l'huile, comme M. *de la Mare* l'a éprouvé chez M. *Boudin*, premier Medecin de feuë Madame la Dauphine.

M.

M. *Jean Verdois* Conful de la Nation *Françoise* attefte qu'il a gueri plufieurs Cancers avec cette huile, & qu'en mangeant une de ces Noix on appaife la Colique.

IV.

Feu M. l'Evêque de *Sées* a affuré qu'un Homme de fon Diocefe, & qu'il connoiffoit, âgé de 94 ans avoit époufé une femme de 83, groffe de lui, qui étoit accouchée à terme d'un garçon. Le temps des Patriarches eft revenu, ou plutôt n'eft pas tout à fait paffé.

V.

Un Boulanger de *Chartres* avoit mis dans fa Cave, qui eft de 36 marches de profondeur & bien voûtée, 7 ou 8 poinçons de braife de fon four. Son fils, jeune homme fort & robufte, allant y porter encore de nouvelle braife avec une Chandelle à la main, la Chandelle s'éteignit à moitié de l'efcalier, il remonta, la ralluma, & redefcendit. Lorfqu'il fut au bas de la Cave, il cria qu'il n'en pouvoit plus, & qu'on vînt à fon fecours, après quoi on ne l'entendit plus. Son frere auffi fort que lui defcendit auffi-tôt, cria de même, & ceffa de crier. Sa femme defcendit après lui, une fervante après elle, & ce fut toûjours la même chofe. Un accident fi étrange mit le voifinage en émotion, mais perfonne ne fe preffoit de defcendre dans la Cave. Il n'y eut qu'un Voifin plus zelé & plus hardi, qui ne croyant pas ces quatre perfonnes mortes defcendit pour leur donner la main, & leur aider à fortir. Il cria, & on ne le revit plus. Un Paffant, homme fort vigoureux, demanda un Croc pour retirer quel-

quelqu'un des gens de la Cave sans descendre jusqu'au bas, il jetta le Croc, & tira la servante, qui ayant pris l'air, fit un soupir. On la saigna aussi-tôt, mais le sang ne vint point, & elle mourut sur la place.

Le lendemain un homme de la Campagne, ami du Boulanger, dît qu'il retireroit tous ces corps avec un Croc, mais de peur de se trouver mal sans pouvoir remonter, il se fit descendre dans la Cave avec des cordes sur un Poulain de bois, & on devoit le retirer dès qu'il crieroit. Il cria bien vîte, mais comme on le remontoit, la Corde cassa malheureusement, & il retomba. On renoüa le plus promptement qu'il se pût cette corde qui s'étoit cassée assez près du haut de la Cave, mais on ne pût le remonter que mort. On l'ouvrit. Il avoit le Cerveau comme sec, les Meninges extraordinairement tenduës, les Poûmons tachetés de marques noires, les Boyaux enflés & gros comme le bras, enflamés & rouges comme du sang, & ce qui étoit le plus particulier, tous les Muscles des bras, des cuisses, & des jambes comme séparés de leurs parties.

Le Magistrat prit connoissance de cet évenement pour l'interêt public, & fit défense qu'aucun descendît dans la Cave, jusqu'à ce qu'on eût eu les avis des Medecins, des Chirurgiens, & même des Maçons. Il fut conclu que la braise que le Boulanger avoit mise dans sa Cave devoit être mal éteinte, que comme il y a beaucoup de salpêtre dans toutes les Caves de *Chartres*, la grande chaleur avoit excité dans celle-là une vapeur très-maligne, qui avoit causé tant de funestes effets, qu'il

qu'il faloit y jetter une grande quantité d'eau qui éteindroit le feu, & feroit tomber la vapeur nitreuſe. Cela fut executé, & au bout de quelques jours on deſcendit dans la Cave un Chien lié ſur une planche avec une Chandelle allumée. Ce Chien ne mourut point, & la Chandelle ne s'éteignit point, ſignes certains que tout le peril étoit paſſé. On retira les morts, mais ſi corrompus par l'eau qu'on n'en pût faire aucune viſite. Ils étoient fort enflés, & l'un avoit la langue hors de la bouche comme s'il eût été étranglé. L'Academie tient cette hiſtoire de M. *de la Hire*. Il y en a une à peu près de la même eſpece dans l'Hiſt. de 1701 *.

VI.

M. l'Abbé *Teinturier*, Archidiacre de *Verdun*, dont nous avons déja parlé ci-deſſus †, a envoyé à M. *Caſſini* le fils la relation d'un Echo, qu'il a vû à 3 lieuës de *Verdun*. Il eſt formé par deux groſſes Tours détachées d'un Corps de logis, & éloignées l'une de l'autre de 26 Toiſes. L'une a un apartement bas de pierre de taille voûté, l'autre n'a que ſon veſtibule qui le ſoit. Chacune a ſon eſcalier. Comme tout ce qui apartient aux Echos peut être appellé la Catoptrique du ſon, parceque le ſon ſe reflêchit ſelon les mêmes loix que la Lumiere, on peut regarder ces deux Tours comme deux Miroirs poſés vis à vis l'un de l'autre, qui ſe renvoient mutuellement les rayons d'un même Objet, en multiplient l'image quoiqu'en l'affoibliſſant toûjours, & la font toûjours paroître plus éloignée. Ainſi lorſqu'on eſt ſur la ligne qui joint

* p. 21. & 22. † p. 16.

joint les deux Tours, & qu'on prononce un mot d'une voix aſſez élevée, on l'entend repeter 12 ou 13 fois, par intervalles égaux, & toûjours plus foiblement. Si l'on ſort de cette ligne juſqu'à une certaine diſtance on n'entend plus d'Echo, par la même raiſon qu'on ne verroit plus d'image ſi l'on s'éloignoit trop de l'eſpace qui eſt entre les deux Miroirs. Si l'on eſt ſur la ligne qui joint une des Tours au Corps de logis, on n'entend plus qu'une repetition, parceque les deux Echos ne joüent plus enſemble à l'égard de celui qui parle, mais un ſeul. Les Memoires que l'Academie imprima en 1692 ont parlé d'un Echo plus ſingulier *.

Monſieur *Jean Scheuchzer* étant venu à *Paris*, & ayant aſſiſté pluſieurs fois aux Aſſemblées de l'Academie, dont il eſt un des plus ſavants & des plus utiles Correſpondants, lui lût une Diſſertation Latine qu'il lui adreſſoit ſur les *Pierres figurées* qu'il avoit obſervées dans ſon voyage de *Flandre* & de *France*.

Les Carrieres des environs de *Paris* ont à differentes profondeurs des Lits, quelquefois aſſez épais, de differentes eſpeces de Coquillages, fortement liés enſemble par de la terre ou du ſable. Quand ces Coquillages ont conſervé leur ſubſtance ou leur conſiſtence naturelle, ils ne meritent pas encore le nom de Pierres figurées, ce n'eſt proprement que quand ils ſont petrifiés; mais ils le meritent encore

* p. 158. & ſuiv.

core mieux quand après avoir servi de moule à une matiere encore fluide qui les a entierement remplis, & s'est durcie ensuite, leur substance a été absolument détruite par le temps, & qu'il ne reste que cette matiere pétrifiée qui represente très-exactement leur figure interieure. Alors tout ce que l'on voit n'est veritablement qu'une Pierre figurée, & cette apparence est si forte qu'il est besoin de prouver que quelque partie d'Animal ait contribué à la formation de cette Pierre. La parfaite conformité des figures en est la démonstration, à quoi M. *Scheuchzer* ajoûte qu'autour de ces Pierres il y a toûjours dans la carriere un espace vuide, qui est précisément celui que remplissoit le Coquillage.

Il peut se trouver des Pierres figurées dont le Moule nous soit presentement inconnu. Les Coquillages qui les auront formées ne seront plus dans nos Mers, ou nous auront échapé. La grande quantité de Pierres qui certainement ont été moulées de cette maniere, nous met en droit de faire cette supposition. Peut-être même quelques Moules seroient-ils perdus, c'est-à-dire que quelques especes de Coquillages auront peri, mais pour employer cette idée un peu hardie, il faut apercevoir dans une Pierre des traces assez sensibles de cette formation.

Aussi ne s'en sert-on pas jusqu'à present pour expliquer une Pierre qu'on croyoit qui ne se trouvoit qu'en *Hongrie* & en *Transilvanie*, & que M. *Scheuchzer* a trouvée en *Suisse*, & encore en plus grande quantité en *Picardie* aux environs de *Noyon*. *Clusius* l'a appellée *Numismale* à cause de sa figure; ce-

pendant elle ne ressemble pas tant à une Medaille ou à une piece de Monnoye, qu'à un Verre convexe des deux côtés, mais plus élevé au milieu que ne demande la courbure sphérique. Ses deux moitiés convexes se séparent facilement, & quelquefois se trouvent naturellement séparées. Alors on voit dans la Pierre des tours faits en spirale, comme ceux d'une corde roulée autour d'elle-même. Ces tours sont liés par des especes de petits filaments, qui s'étendent obliquement vers la circonference. La surface exterieure de la Pierre est quelquefois polie, mais le plus souvent herissée de petits points, dont differentes suites sont des especes de canelures irregulieres. La generation de ces sortes de Pierres, si l'on ne peut jamais les soupçonner d'avoir été moulées, réduira peut-être les Physiciens à l'Hypothese des Semences hazardée par feu M. *Tournefort* *.

Pour expliquer les Coquillages petrifiés, & qnelquefois ensevelis sous la terre à de grandes profondeurs, ou ceux qui par une longue suite de siécles se sont consumés après avoir laissé seulement l'empreinte de leurs figures, M. *Scheuchzer* a recours à son Hypothese du Déluge déja expliquée dans l'Hist. de 1708 †, & qui lui est commune sur ces sortes de sujets avec M. son frere. Si ce que nous avons rapporté d'après M. *Saulmon* dans l'Hist. de 1707 ‡ ne demande pas absolument cette même hypothese, du moins faut-il qu'une partie considerable de ce qui est aujourd'hui Terre, ait été Mer autrefois.

Nous

* V. l'Hist. de 1702. p. 65. & suiv. † p. 36. & suiv. ‡ p. 5. & suiv.

Nous ne passerons point ici sous silence une idée, sur laquelle cependant M. *Scheuchzer* a déclaré qu'il ne prétendoit point insister, & qu'il n'a proposée que comme une espece de songe philosophique. Si l'on fait tourner avec assez de vitesse autour de son centre un grand Bassin rond à demi plein d'eau, jusqu'à ce qu'enfin l'eau ait pris toute la vitesse du Bassin, & qu'on vienne à l'arrêter brusquement, l'eau ne laissera pas de continuer à se mouvoir, & même avec tant de force qu'elle pourra surmonter les bords du vaisseau. De même si Dieu arrêtoit en un instant le tournoyement de la Terre sur son Axe, les eaux de la Mer se répandroient de toutes parts sur les terres avec violence. Cette maniere d'expliquer le Déluge n'est pas moins simple que nouvelle; lors même que Dieu fait des coups de sa puissance extraordinaire, & s'affranchit de ces loix si simples qu'il a établies, on peut croire que le Miracle s'execute encore avec le plus simplicité qu'il soit possible.

L'*Herbarium Diluvianum* de M. *Jean Jacques Scheuchzer* imprimé à *Zuric* en 1709, & envoyé à l'Academie par son Auteur roule sur le même principe, & que l'Ouvrage dont nous venons de parler, & que tous ceux de ces deux freres dont l'Hist. de 1708 * a fait mention. Cet Herbier extraordinaire n'est composé que de Plantes, qui du temps du Déluge ayant été ensevelies dans des matieres mol-

* p. 34. & suiv.

molles, ont laiſſé l'émpreinte de leurs figures ſur ces mêmes matieres lorſqu'elles ſont venuës enſuite à ſe petrifier. Ce ne ſont que de ſimples figures ſans ſubſtance, mais ſi parfaites & ſi exactes, juſque dans les plus petites particularités de ce qu'elles repréſentent, qu'il eſt impoſſible de l'y méconnoître. Parmi un grand nombre de Plantes, qui ſont toutes de ces Païs-ci, il y en a une *Indienne*, dont la Pierre a été trouvée en *Saxe*, ce qui s'accorde avec une obſervation déja faite dans l'Hiſt de 1706 *. L'étrange bouleverſement que le Déluge a dû cauſer ſur la ſurface de la Terre, rend fort poſſible ce tranſport d'une Plante des *Indes* en *Allemagne*. Selon la maniere dont l'Ecriture Sainte s'explique, on peut également mettre le commencement du Déluge ou au Printemps ou en Automne, mais M. *Scheuchzer* leve cette incertitude par quelques-unes des Plantes de ſon Herbier, & principalement par un Epi d'Orge. Leur âge n'eſt que celui qu'elles ont ici à la fin de Mai. Cela ſe confirme encore par un Inſecte ou deux, dont on connoît aſſez la Vie, & qui ne ſont pas plus âgés. Voilà de nouvelles eſpeces de Medailles, dont les dates ſont & ſans comparaiſon plus anciennes, & plus importantes, & plus ſûres, que celles de toutes les Medailles Grecques & Romaines.

Il y a de certaines Pierres qui repreſentent ſur leur ſurface, non pas comme celles de cet Herbier, une ſeule partie d'une Plante, ou une ſeule feuille, mais des Buiſſons, & de petites forêts très-agréables. Celles-là for-

* p. 11. 12. 13.

force de repréſenter,* ne repréſentent rien, & en effet, à les examiner tant ſoit peu, on voit que ces Arbres ou Buiſſons ne reſſemblent à aucune Plante veritable. Ils ſont même quelquefois accompagnés de petits Châteaux, ou de Figures, qui à la verité embeliſſent le Tableau, mais le rendent indigne de l'Herbier du Déluge. Ce ſont-là de veritables Jeux de la Nature. M. *Scheuchzer* entreprend d'expliquer ce qu'il y a de Phyſique dans ces Jeux, c'eſt-à-dire, comment de certains ſucs qui exudoient des pores d'une Pierre à meſure qu'elle ſe formoit, ont pû ſe répandre entre deux des feuilles ou des couches qui la compoſoient, & y tracer de certaines repreſentations à peu près regulieres, auſquelles enſuite nôtre imagination prête quelquefois un peu de ce qui leur manque. Il a même rendu ſon explication ſenſible aux yeux par l'experience toute ſemblable de deux plaques de Marbre poli, qu'il frote l'une contre l'autre, après avoir mis de l'Huile entre-deux. Elle s'y répand de maniere qu'elle forme des Trones, & des Branches.

Entre les reſtes du Déluge, qu'on pourroit appeller Reliques, M. *Scheuchzer* compte un gros Tronc d'Arbre, qu'il ſait qui eſt couché ſur le ſommet du Mont *Stella*, la plus haute de toutes les Montagnes des *Alpes*. M. *Jean Scheuchzer* a tenté deux fois d'aller le voir de ſes propres yeux, quoique les plus déterminés Chaſſeurs n'ayent jamais été là qu'avec crainte, mais les Néges ont été un obſtacle invincible. Selon ſon eſtime, ce Tronc eſt élevé de 4000 pieds au-deſſus du lieu le plus élevé de ces Montagnes, où il

croiſſe naturellement des Arbres, car paſſé une certaine hauteur il n'en croît plus. Qui pourroit l'avoir porté-là? à quel deſſein? de quelles Machines ſe ſeroit-on ſervi?

MOnſieur le Comte *Marſigli* a envoyé à l'Academie un Ouvrage manuſcrit intitulé *Eſſai de Phyſique ſur l'Hiſtoire de la Mer*, qu'il lui a fait l'honneur de lui dédier. Il avoit mis à profit pour la Philoſophie un ſéjour qu'il avoit fait ſur les Côtes de *Provence* & de *Languedoc*, & s'étoit mis à y étudier particulierement la Mer. La maniere dont il s'y eſt pris ſuffiroit pour faire bien entendre ce que c'eſt que le Genie d'obſervation, & pour en donner un modele. Il a formé un deſſein auſſi vaſte que le ſujet, il en a embraſſé toutes les parties, il a entrepris de faire par lui-même toutes les experiences qui pouvoient y avoir rapport. Si l'on avoit un nombre ſuffiſant d'auſſi bons Memoires faits par des Obſervateurs qui euſſent été poſtés en differens endroits du Monde, on auroit enfin une Hiſtoire Naturelle.

L'Ouvrage de M. le Comte *Marſigli* eſt ſi conſiderable, que les Extraits que l'Academie fit faire par Mrs *Maraldi* & *Geoffroy* furent eux-mêmes d'aſſez grands Ouvrages. Nous n'en donnerons ici qu'une idée ſans comparaiſon plus abregée, & nous nous aiderons beaucoup de leur travail. L'Hiſtoire de la Mer eſt diviſée en 5 parties. La 1re traite de la diſpoſition du fond ou du Baſſin de la Mer. La 2de de la nature de l'eau. La 3me de

de ses mouvements. La 4me des Plantes qui y croissent. La 5me des Poissons. Cette derniere partie n'est pas achevée, & l'Academie n'en a encore rien vû. Tout est accompagné d'une grande quantité de figures faites avec beaucoup de soin.

Pour reconnoître la nature & la disposition des Côtes, il a fait dans des Barques differents petits voyages, qui sont tous compris entre le Cap de *Sissé* près de *Toulon*, & le Cap d'*Agde* en *Languedoc*. Il en a fait d'autres en Mer, & quelquefois jusqu'à 11 lieuës pour examiner la profondeur & la nature du fond. Il a trouvé que le Golphe de *Lyon* est coupé en deux par une Côte cachée sous l'eau, que la partie qui est depuis la terre jusqu'à cette Côte ne passe pas 70 brasses de profondeur, & que l'autre qui est vers le large en a 150 en quelques endroits, & quelquefois tant, qu'elle ne peut être sondée. Il la nomme l'*Abysme*. Il a recherché quelle étoit la conformation du terrein, c'est-à-dire l'arrangement des differents bans ou lits de terre, de sable, de roche, &c. non-seulement dans la Côte, mais dans les Isles ou Ecueils voisins. Cette conformation s'est trouvée semblable, de sorte que les Isles ne sont que des fragmens de la Terre ferme, & qu'apparemment le fond de la Mer en est une continuation. Delà on peut conjecturer, comme M. *Marsigli*, que le Globe de la Terre a une structure déterminée, organique, & qui n'a pas souffert de grands changements, du moins depuis un temps considerable.

Il fait voir que des lits de Sel & de Bitume sont mêlés entre des lits de pierre, & que sur

le fond *naturel* de la mer il s'eſt formé un fond *accidentel* par le mêlange de differentes matieres, ſable, coquillages, vaſe, &c. que la glutinoſité de la mer a fortement unies & collées enſemble, & qui ſe ſont enſuite durcies, même quelquefois juſqu'à ſe petrifier. Comme ces incruſtations ſe font neceſſairement par couches, il y en a telle où les Pêcheurs diſtinguent les augmentations annuelles. Elles ont une varieté ſurprenante de Couleurs, qui quelquefois penetrent juſque dans la ſubſtance pierreuſe, mais le plus ſouvent ne ſont que ſuperficielles, & ſe diſſipent hors de l'eau.

Quelques-unes des matieres qui forment ces incruſtations ont donné par la Chimie des principes ſi ſemblables à ceux des Plantes marines, qu'on pourroit les ſoupçonner d'en être, d'autant plus qu'elles ſont quelquefois toutes diſpoſées par filaments. Ce ſeroient des Mouſſes de Mer dures, ou des *Lichens* qui s'attachent à la pierre, & en ont preſque la dureté.

Il a paru à M. le Comte *Marſigli* par un Thermometre plongé dans l'eau, que le degré de chaleur y eſt égal à differentes profondeurs, qu'en Hyver il eſt un peu plus grand dans cette Mer que dans l'air, & au contraire en Eté, mais aſſez ſouvent égal. Cependant M. *Marſigli* a obſervé auſſi que pluſieurs Plantes de la Mer s'accordent avec celles de Terre pour repouſſer au Printemps, plutôt qu'en d'autres ſaiſons. Un accident empêcha que les experiences ſur la chaleur de la Mer ne fuſſent continuées autant qu'il auroit falu.

Se-

Selon lui, l'eau de la mer, on suppose qu'elle soit bien choisie, est plus claire & plus brillante qu'aucune autre eau. Quant à sa couleur, elle dépend & du fond, & du Ciel, & de tant d'autres circonstances jusqu'ici moins connuës, que toutes les experiences de M. *Marsigli* lui laissent encore sur ce sujet beaucoup à desirer.

Il est plus aisé de déterminer les causes de sa salure, & de son amertume, car il faut bien remarquer l'amertume comme differente de la salure. L'une est produite par la dissolution des lits ou bancs de Sel, l'autre par la dissolution des lits de Bitume.

L'eau est beaucoup plus propre à dissoudre le sel que le Bitume, qui est une matiere huileuse. Aussi dans l'eau de mer la dose du sel est-elle beaucoup plus forte que celle du bitume. M. *Marsigli* ayant pris 23 onces 2 gros d'eau de Citerne pour en faire de l'eau de mer, il y mit 6 gros de sel commun, & seulement 48 grains d'esprit de Charbon de terre, car le Charbon de terre est bitume, & d'ailleurs il s'en trouve des Mines dans les Montagnes de *Provence*, & avec ce mêlange il eut une eau de mer artificielle du même goût que la naturelle. Ces 48 grains n'augmenterent point le poids de l'eau pesée par l'Aréometre.

La petite quantité & la legereté de cette matiere bitumineuse, font que l'eau de mer distillée, & qui par la distillation a perdu sa salure, n'a pas pour cela perdu son amertume, & un gout desagreable, ni même, à ce qu'on prétend, une qualité malfaisante. La distillation qui se fait naturellement par le

Soleil, & qui eſt aſſez differente de celle d'un Alembic, purge parfaitement l'eau de mer de ſon bitume.

Il y a dans la Terre tant de matieres differentes que la Mer lave, & dont elle doit enlever des particules, qu'on peut aſſez legitimement croire que le bitume n'eſt pas le ſeul principe qui s'y mêle avec le ſel.

Par ce que nous venons de dire, on voit que ſur 24 onces d'eau de mer il y a 6 gros de ſel, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'elle contient de ſel la 32me partie de ſon poids. Mais cela n'eſt vrai que de l'eau priſe à la ſurface de la mer, celle du fond eſt plus ſalée, & a la 29me partie de ſon poids de ſel. Les eaux plus ſalées ſont auſſi plus peſantes. Celles qui ſont ſur la ſurface de la mer à l'embouchure du *Rhône*, ſont d'une 303me partie plus legeres que les eaux plus éloignées pareillement ſuperficielles, & celles-ci encore plus legeres que celles qui ſont plus éloignées de Terre.

Il eſt aſſez étonnant que l'eau de la Mer, à qui le ſel n'a pas manqué, n'en ait pas diſſous tout ce qu'elle en pouvoit diſſoudre. Par les experiences de M. le Comte *Marſigli* une quantité d'eau qui doit en contenir 6 gros, en diſſout encore 4½, & l'eau de mer artificielle 5. Il conjecture que les Animaux & les Plantes de la Mer conſument une partie de ſon ſel, qu'il s'en diſſipe une autre partie en l'air, que les eaux douces qu'elle reçoit non-ſeulement par les Rivieres, mais par les ſources de ſon fond, la deſſalent encore, mais avec tout cela il ne prétend pas que la difficulté ſoit entierement levée.

Il

Il a fait paſſer 14 livres d'eau de mer au travers de 15 pots de terre, qu'il a ſucceſſivement remplis de terre de jardin, & de ſable de mer. S'ils avoient été joints enſemble, ils auroient fait une Caſcade de 75 pouces de long, & de 5 de large. Les 14 liv. d'eau ayant paſſé & par le ſable & par la terre ont été également réduites à 5 liv. 2 onces, mais elles ont été mieux deſſalées par le ſable, & dépouillées d'une plus grande partie de leur poids. Si la Caſcade de ſable avoit été double en longueur, on peut croire qu'elles ſeroient devenuës preſque inſipides. Par ce moyen l'eau de la mer pourroit devenir douce en ſe filtrant dans les entrailles de la Terre, ſi au bout d'un certain temps les filtres ne ſe rempliſſoient pas du ſel qui y a été dépoſé.

Le ſel des eaux ſuperficielles eſt blanc, & celui des eaux profondes cendré obſcur. Le premier eſt le ſeul à qui l'on trouve de l'acide, il eſt d'un ſalé plus mordant, & d'une amertume beaucoup moins ſenſible. Delà vient qu'à *Peccais* en *Languedoc* où l'on tire du ſel d'eaux profondes de Puits, il faut le laiſſer expoſé à l'air du moins pendant trois ans, avant que de le débiter. Ce temps lui eſt neceſſaire pour ſe dépouiller d'une amertume qui ſeroit inſupportable. Nous ſupprimons un grand nombre d'obſervations ſur le Sel marin, parceque cette matiere eſt plus connuë.

M. le Comte *Marſigli* n'a pas eu le loiſir de ſe contenter pleinement ſur le fait du Bitume contenu dans l'eau de la Mer. Il croit cependant que c'eſt ce qui produit l'onctuoſi-

té naturelle de cette eau, que la diſtillation même ne lui ôte pas, la grande quantité de glu qui s'attache ſur les pierres, & ſur les Plantes, l'union de tant de corps heterogenes qui ſe collent enſemble, le Tartre qui endurcit en quelques endroits le fond de la mer, ou enduit pluſieurs ſortes de matieres, & principalement les Lithophytons, Plantes marines. Il a commencé en differents temps ſur les tartariſations de la mer des experiences, qui n'ont pû être ſuivies aſſez loin.

Il a obſervé que les Legumes cuits dans l'eau de la Mer en ſortent plus durs qu'on ne les y a mis, que la chair de Mouton y devient plus blanche & plus tendre que dans l'eau douce, mais fort ſalée & fort amere, que le pain fait avec l'eau de mer eſt ſalé, & ſe peut manger pendant qu'il eſt tendre, mais que lorſqu'il eſt raſſis il prend une amertume exceſſive.

La Mer a trois ſortes de mouvemens, le Flux & Reflux, les Courants, & l'Ondulation. On ſait que la Mediterranée n'a point de Flux & de Reflux, du moins dans ſon Tout, & en effet ſelon le Syſtême ordinaire elle n'en doit pas avoir, puiſqu'elle n'eſt pas ſous la route de la Lune. Cependant comme un flux & reflux peu ſenſible auroit pû facilement échaper aux obſervations que l'on fait communément, M. le Comte *Marſigli* en a fait de nouvelles, & auſquelles ce mouvement ne ſe ſeroit pas dérobé. Il ne s'eſt point du tout fait apercevoir dans les endroits où l'on obſervoit.

M. *Marſigli* n'a rien découvert de reglé ſur les Courants, quoiqu'il n'y ait pas épargné ſes

ſes voyages, ni ſes peines. Il n'a pû verifier ce qu'on dit communément de ce fameux Courant qui côtoye toute la Mediterranée, comme s'il étoit formé par l'entrée des eaux de l'Ocean, & par leur retour. Mais il croit avoir reconnu une choſe fort ſinguliere. Pendant l'Eté & dans le temps de la Pêche du Corail, on aperçoit à la Côte de l'*Abyſme* un Courant qui paroît avoir rapport au mouvement du Soleil ſur l'Horiſon, mais de maniere qu'il lui eſt toûjours oppoſé. Lorſque le Soleil eſt dans la partie Orientale de ſon cours diurne, c'eſt-à-dire depuis ſon lever juſqu'à Midi, le Courant va à l'Occident, à Midi il ſe tourne au Nord, enſuite à l'Orient. On n'a pas marqué ſi à Minuit il alloit au Sud ; cela conviendroit au reſte, & paroît même neceſſaire.

Quant à l'ondulation, il ſuffit d'en connoître les excès. M. *Marſigli* a obſervé entre *Maguelone* & *Peyrole* que dans une grande tempête les Ondes s'élevoient juſqu'à 7 pieds ſur le niveau ordinaire de la Mer. Aux rivages montueux, comme ſont ceux de *Provence*, un Vent furieux de *Lebeſche* n'y fait élever l'eau que de 5 pieds, mais la percuſſion qu'elle fait contre les roches la pouſſe quelquefois juſqu'à 8. Cela n'eſt pas comparable aux Tempêtes poëtiques.

Nous réſervons pour la Chimie & pour la Botanique tout ce qui regarde les Plantes de la Mer, & leur Analyſe, tant afin d'obſerver plus d'ordre, que de peur de faire ici un trop long Extrait, ou plutôt pour avoir droit de le faire plus long en le diviſant. Quelque étendu qu'il puiſſe être, il ſera encore extrê-

mement court par rapport à la grande quantité d'experiences, & de vûës que contient l'Ouvrage de M. le Comte *Marsigli.*

NOns renvoyons entierement aux Memoires

* Le Journal de M. *de la Hire* pour 1709.

† Ce qu'il a donné sur les Pluyes & les Vens observés à *Pontbriand.*

* Et sur les observations du Barometre faites à *Zuric.*

† Les Reflexions de M. de *Reaumur* sur la Soie des Araignées.

* V. les M. p. 184. † V. les M. p. 189.
* V. les M. p. 192. † V. les M. p. 504.



ANATOMIE.

SUR LES MOULES D'ETANG.

* NOus connoissons assez, du moins jusqu'à un certain point, les Animaux les plus exposés à nos yeux, & avec qui nous avons, pour ainsi dire, le plus de commerce. Mais il y en a une infinité d'autres que le

* V. les M. p. 533.

le peu de besoin que nous en avons, la difficulté de les observer, un certain mépris que nous donnent leur petitesse ou leur figure, nous font negliger, ou nous dérobent absolument. Tels sont principalement les Insectes & les Coquillages.

Qui croiroit qu'il y a un Animal qui ne reçoit sa nourriture, & ne respire que par l'anus, qui n'a ni Veines ni Arteres, en qui il ne se fait point de circulation? Il ne faut pas compter qu'il est Hermaphrodite, c'est une merveille presentement trop commune, mais il differe de tous les autres Hermaphrodites connus en ce qu'il se multiplie indépendamment d'un autre Animal de son espece, & est lui seul le Pere & la Mere de ce qui vient de lui. Voilà une idée d'Animal toute nouvelle. C'est la Moule d'Etang, dont M. *Mery* a démêlé la structure, malgré sa figure informe, & rebutante par son excessive singularité.

Ce qu'on peut appeller Tête dans la Moule, quoiqu'on n'y trouve point d'yeux, ni d'oreilles, ni de langue, mais seulement une ouverture qu'on peut appeller bouche ; est une partie immobile, & attachée à une des Coquilles, de sorte qu'elle ne peut aller chercher la nourriture, & qu'il faut que la nourriture vienne la chercher Cette nourriture n'est que de l'eau, qui lorsque les Coquilles s'ouvrent entre dans l'anus de la Moule qui s'ouvre en même temps, passe delà dans certains réservoirs ou canaux compris entre la superficie interieure de la Coquille, & la superficie exterieure de l'Animal, & enfin va se rendre dans la bouche de cet Animal,

mal, quand il l'y oblige par un certain mouvement.

Au fond de la bouche se presentent deux Canaux pour recevoir l'eau. L'un jette dans le corps de la Moule plusieurs branches, dont une va se terminer au Cœur. L'autre est une espece d'Intestin qui d'abord passe par le Cerveau, fait ensuite plusieurs circonvolutions dans le Foie, au sortir delà traverse le Cœur en ligne droite, & va finir dans l'anus.

Ce Cerveau & ce Foie ne le sont guere qu'autant que l'on veut, le Cœur est un peu davantage un Cœur. Il a un Ventricule & deux Oreilletes, & les mouvemens de Systole & de Diastole alternatifs dans le Ventricule & dans les Oreilletes, mais il n'a ni Veines ni Arteres; l'eau qui lui est apportée par son canal entre du Ventricule dans les Oreilletes, & retourne des Oreilletes dans le Ventricule, & fait une legere representation de circulation sans aucun effet apparent, car une fois arrivée dans ce Cœur elle n'a plus de chemin pour en sortir. Que devient donc l'amas qui s'y en doit faire? apparemment il ne se fait point d'amas, parce que l'Animal ne fait pas continuellement couler de l'eau par sa bouche dans son cœur; & que quand il y en a fait entrer une certaine quantité, les contractions du cœur l'expriment au travers de ses pores, & la poussent dans les parties voisines, qui s'en abbreuvent, & s'en nourrissent.

Le canal que M. *Méry* nomme Intestin, & qui aussi-bien que l'autre reçoit immediatement l'eau de la bouche, ne paroît pas propre à porter la nourriture aux parties, parce qu'il

qu'il n'a point de branches qui s'y distribuent. Cependant il contient vers son commencement, & vers sa fin des matieres assez differentes, dont les premieres pourroient être de l'eau digerée, c'est-à-dire, les sucs nourriciers qui en ont été tirés, & les autres en seroient l'excrément.

La Moule ne peut respirer que quand elle s'est élevée sur la surface de l'eau, & elle s'y éleve comme les autres Poissons, par la dilatation qu'elle cause à l'air qu'elle contient en elle-même en dilatant la cavité qui le renferme. Alors c'est encore son anus qui reçoit l'air du dehors, & le conduit dans ses Poumons, mais il faut qu'il ne lui soit pas fort necessaire, car elle est presque toujours plongée au fond de l'eau.

Elle a des Ovaires & des Vesicules séminales. Ces deux especes d'organes sont également composés de tuyaux arrangés les uns à côté des autres, tous fermés par un même bout, & ouverts par le bout opposé. On ne distingue pas ces parties par leur structure, qui est toute pareille à la vûe, mais par la difference de ce qu'elles contiennent, & d'autant plus que les Ovaires sont toujours pleins d'Oeufs en Hiver & vuides en Eté, & que les Vesicules sont en toute saison également peu remplies de leur lait, qui par conséquent paroît s'en écouler toujours. Tous les tuyaux se déchargent dans l'anus, & M. *Méry* conçoit que quand les Oeufs vont s'y rendre dans la saison de leur sortie, ils ne peuvent manquer d'y rencontrer le lait ou la semence qui les féconde. L'Animal n'a donc pas besoin du secours d'un autre pour la génération.

M.

M. *Méry* n'eſt pas d'accord avec feu M. *Poupart* ſur le mouvement progreſſif des Moules d'Etang *. Il prétend que leur ventre entier, qui quand elles veulent ſort de 2 pouces hors de leurs Coquilles ſous la figure de la Carene d'un Navire, rampe ſur la vaſe, comme feroit ſur la terre le ventre d'un ſerpent. Il décrit les Muſcles qui par leurs contractions alternatives font tout le jeu de cette méchanique.

Il ne croit pas non plus que la Coquille de la Moule ſe forme, comme M. de *Reaumur* a trouvé que ſe formoit celle du Limaçon ‡. Les premiers tours de celle-ci ne ſont pas plus grands dans un Limaçon plus grand & plus âgé, ce qui prouve que la Coquille n'eſt pas un membre de l'Animal, & ſe fait par une addition ſucceſſive de parties étrangeres; mais de certaines bandes que l'on aperçoit ſur la Coquille d'une Moule ſont plus grandes dans de plus grandes Moules. D'ailleurs la Moule a 8 Muſcles attachés à la ſurface interieure de ſes Coquilles; ſi les Coquilles ne croiſſoient pas de la même maniere que les Muſcles, il faudroit donc que ceux-ci attachés d'abord en certains endroits dans la Moule naiſſante, changeaſſent continuellement d'attache juſqu'à la derniere croiſſance de l'Animal, & comment cela ſeroit-il poſſible? la difficulté eſt conſiderable, mais peut-être n'eſt-ce qu'une difficulté.

SUR

* V. ci-deſſus, p. 13.
‡ V. l'Hiſt. de 1709. p. 22. & ſuiv.



SUR L'IRIS

DE L'OEIL.

* IL est à propos que les pensées nouvelles & hardies soient contestées; elles s'affermissent ou succombent, & l'on sait à quoi s'en tenir. Celle de M. *Méry* sur la dilatation & le resserrement de la membane Iris, exposée dans l'Hist. de 1704 ‡, étoit de cette espece. M. *de la Hire* * n'a pu admetre que les fibres de l'Iris, qu'il faut concevoir comme autant de petits Muscles, eussent une action toute contraire à celle de tous les autres Muscles, c'est-à-dire s'allongeassent en se gonflant, & se raccourcissent en se remettant dans leur état naturel. C'est cette hypothese singuliere, & qui, comme nous l'avons dit en 1704, n'a pour elle qu'un seul exemple dans tout le Corps humain, que M. *Méry* entreprend de défendre. Il ne s'agit que de savoir lequel des deux états des fibres de l'Iris, de celui où elles sont allongées, ou de celui où elles sont raccourcies, est leur état naturel. Dans le premier la Prunelle est moins ouverte, dans l'autre elle l'est davantage.

Tous les Muscles ont un état naturel où ils sont en repos, & ils n'en sortent que par l'action d'une cause étrangere, qui change leur

* V. les M. p.371. ‡ p. 15. & suiv.
* V. l'Hist. de 1709. p. 115. & suiv.

leur figure & leur position. On suppose communément que cette cause ce sont les Esprits animaux, dont l'influence plus abondante grossit les Muscles, & les accourcit. Quand cette espece de violence cesse, ils se remettent par leur ressort dans leur premier état. Ainsi le ressort naturel des parties est la force opposée à la cause étrangere qui change les Muscles. M. *Méry* prouve que la mort ne détruit point ce ressort, tant que les parties sont exemptes de corruption, & en effet il est évident que le ressort ne suppose rien de vital. Dans un Chat mort les dernieres Phalanges des doits sont toujours entierement relevées, parce qu'il y a des Fibres à ressort destinées à cet effet, qui ne peuvent plus être combatües par leurs Muscles *antagonistes*, dont l'action dépend uniquement des Esprits, & cesse avec eux. De même les Coquilles d'une Moule d'Etang morte sont toujours entr'ouvertes, parce qu'elles s'ouvrent par un ressort, & ne se ferment que par des Muscles qui ont besoin d'Esprits. L'état où seront les Fibres de l'Iris après la mort sera donc celui où leur ressort les tient naturellement, or après la mort la Prunelle est toujours dilatée, c'est-à-dire que les Fibres de l'Iris sont raccourcies; elles le sont pareillement & dans la Goute sereine, & dans la Syncope, dont l'une est une mort de l'Oeil par rapport à la vision, & l'autre une petite mort de tout l'Homme, & toutes deux une privation d'Esprits. C'est donc l'état naturel des Fibres de l'Iris que d'être raccourcies, & de tenir la Prunelle ouverte.

Tout cela suppose que la membrane de l'Iris

l'Iris qui est circulaire soit composée de petites Fibres droites, toutes dirigées de la circonference exterieure vers le centre, & c'est là en effet la structure que l'on y apperçoit. Mais comme dans une partie aussi petite, & aussi délicate on est en droit de supposer à peu près ce que l'on veut, on pourroit imaginer que sur ce plan de Fibres droites il y auroit un autre plan de Fibres circulaires, qui formeroient un Muscle total antagoniste du premier.

Mais M. *Méry* oppose à cette idée que si ces deux Muscles sont antagonistes, ils ont des actions contraires, que quand les Fibres droites sont allongées, les circulaires doivent se raccourcir, & au contraire, que les Fibres circulaires accourcies forment de plus petits cercles, & par conséquent diminuent l'ouverture de la Prunelle, ainsi que font les Fibres droites allongées, que les deux Muscles ne font donc que le même effet, & ne sont pas proprement antagonistes comme on le suppose, mais *congeneres*, & que le circulaire qui n'est qu'imaginé, & ne se voit point, est absolument inutile.

Si l'on donne la même action aux deux Muscles, & que les Fibres circulaires s'allongent, ou s'accourcissent en même temps que les droites, il est vrai que les effets seront contraires, & que les Fibres circulaires ouvriront la Prunelle, par exemple, tandis que les droites la fermeront. Mais à quoi bon cette contrarieté d'effets, dont l'un détruiroit l'autre ? La Prunelle seroit donc toûjours dans une ouverture moyenne, à moins que les deux Muscles ne l'emportassent alterna-

tive-

tivement l'un ſur l'autre. Mais cet avantage alternatif ne paroît pas poſſible, puiſqu'il devroit venir non de leur action alternative, car on ſuppoſe ici qu'ils agiſſent enſemble, mais de leur force abſoluë qui ne peut être alternativement plus grande & plus petite dans les deux.

En voilà peut-être aſſez ſur le fond de la queſtion dépouillée de tout ce qui ne lui eſt pas eſſentiel. Le reſte apartiendroit à la conteſtation, qui ne peut guere ſe renfermer dans le ſeul éclairciſſement d'un ſujet. L'amour de la Verité même, s'il eſt un peu vif, paſſera les bornes de ce que demande préciſément l'interêt de la Verité.



DIVERSES OBSERVATIONS
ANATOMIQUES.

I.

MOnſieur *Homberg* a avancé ce Paradoxe, que l'on pouvoit guerir un Rhumatiſme par un bain d'eau froide auſſi-bien que par un bain chaud, ou par la ſueur. Le Rhumatiſme eſt cauſé par une ſeroſité âcre, devenuë aſſez ſubtile pour s'échaper des veines, d'où elle s'eſt épanchée dans des Muſcles, dont elle picote les Fibres, & embarraſſe les mouvemens. Comme ſa grande ſubtilité fait qu'elle s'éparpille beaucoup, elle ne peut plus être repriſe par les veines d'où elle eſt ſortie. Il eſt égal ou de la chaſſer du corps, ou de la

la faire rentrer dans ses vaisseaux. Une grande chaleur la fera sortir par transpiration, le froid la condensera & la mettra en état de rentrer dans les veines. Peut-être même suffit-il que le froid empêche une nouvelle serosité de succeder à la premiere, qui necessairement se brise, s'attenuë, & se dissipe. Le chaud dispose au contraire une nouvelle serosité à s'échaper des vaisseaux.

II.

Dans le cadavre d'un Enfant mort à 6 jours, M. *Littre* a vû le Rectum divisé en deux parties, qui ne tenoient l'une à l'autre que par quelques petits filets, longs environ d'un pouce. Ces deux parties separées étoient fermées chacune de son côté par le bout où s'étoit faite la separation, de sorte que les deux clôtures se regardoient. Apparemment le Rectum n'ayant pas pris dans ce fœtus autant d'accroissement à proportion que les parties ausquelles il étoit attaché, avoit été étendu & tiré avec violence, & enfin entierement déchiré, à l'exception de quelques fibres plus fortes, qui étoient demeurées entieres, quoique fort allongées. Ce déchirement s'étoit fait dans le temps où le canal étoit encore vuide, & rien par conséquent n'avoit empêché que les extremités des deux parties separées ne s'affaissassent, & ne se collassent ensemble, ce qui avoit fait les deux clôtures. Ensuite la partie superieure de l'Intestin s'étoit remplie de *meconium*, mais non pas en assez grande quantité pour être obligée de se rouvrir. Quant à la partie inferieure, elle avoit toûjours dû être, & étoit en effet entierement vuide. Il est aisé de concevoir quels

quels accidens s'ensuivoient de cette conformation accidentelle, & combien la mort de l'Enfant dût être prompte, puisque ses excrémens ne pouvoient sortir, & que tout ce qu'on lui faisoit prendre pour le déboucher augmentoit necessairement le mal.

M. *Littre* qui a voulu rendre son observation utile, a imaginé & proposé une operation chirurgique fort délicate pour les cas où l'on auroit reconnu une semblable conformation. Il faudroit faire une incision au Ventre, & recoudre ensemble les deux parties d'Intestin après les avoir rouvertes, ou du moins faire venir la partie superieure de l'Intestin à la plaie du Ventre, que l'on ne refermeroit jamais, & qui feroit la fonction d'anus. Sur cette legere idée, d'habiles Chirurgiens pourront imaginer d'eux-mêmes le détail que nous supprimons. Il suffit souvent de savoir en gros qu'une chose seroit possible, & de n'en pas désesperer à la premiere vûë.

III.

M. *Chomel* a fait voir à l'Academie 22 Pierres qui venoient d'être trouvées dans le corps d'une Dame de 80 ans, fort vigoureuse pour son âge, & morte d'apoplexie. Elles s'étoient formées dans un sac, qui n'étoit qu'une extension des membranes du Duodenum, vers le haut de cet Intestin. Elles étoient de 5 à 6 lignes de diametre, toutes presque égales, de figure assez reguliere, du moins autant qu'il se pouvoit après s'être comprimées les unes les autres dans une cavité commune, lorsqu'elles étoient encore molles. Leur couleur exterieure étoit d'un blanc jaunâtre, leur surface polie, luisante,

&

& un peu ſavonneuſe. Leur conſiſtence, quoique ſolide, n'étoit pas abſolument pierreuſe, on les caſſoit avec facilité, & on voyoit diſtinctement les differentes couches dont elles étoient compoſées, juſque vers le milieu de ſon épaiſſeur. Au centre, & dans quelque étenduë à l'entour la matiere étoit plus ſpongieuſe & moins dure, il partoit de ce centre des canelures qui comme des rayons ſe terminoient à la couche la plus interieure de celles qui ſe pouvoient diſtinguer. Ce milieu étoit ſemé de quelques grains blancs, & brillants comme des particules de ſels cryſtalliſés.

M. *Chomel* ayant mis aux eſſais Chimiques ces pierres réduites en poudre, trouva qu'elles ne donnoient aucun indice ni d'Acide ni d'Alcali, & que par conſéquent elles étoient d'une nature abſolument terreuſe.

Comme c'eſt à l'entrée du Duodenum que ſe mêlent d'abord le Chile qui ſort de l'Eſtomac, le ſuc Pancreatique, & la Bile, M. *Chomel* croit qu'un Chile mal digeré, & par-là plus propre à faire une maſſe ſolide, durci encore par le mélange des deux autres ſucs mal conditionnés, aura pû donner naiſſance à une premiere pierre, mais encore fort tendre, qui ſera attachée à la membrane interne du Duodenum. A meſure qu'elle groſſiſſoit, elle aura augmenté ſa petite loge, & pouſſé les membranes en dehors, pour faire place aux matieres qui doivent couler dans ce canal. Voilà le ſac qui commence à ſe former, & la pierre en ſe durciſſant par le temps aura perdu l'onctuoſité qui l'y attachoit, & y

aura floté librement. Après cela la generation de nouvelles pierres, & l'augmentation du sac sont aisées à imaginer. La Dame qui portoit ces pierres ne vomissoit point, mais deux heures après qu'elle avoit mangé elle sentoit une legere douleur vers l'endroit où le sac étoit placé. C'étoit-là justement le temps où le Chile de la nouvelle digestion couloit dans le Duodenum, qui ne lui donnoit pas un passage assez libre, parcequ'il étoit comprimé & gêné par le sac.

IV.

M. *Geoffroy* le jeune a fait voir un Ténia trouvé dans une Tanche fort saine & fort grasse, semblable à ceux qui se trouvent dans l'Homme, à cela près qu'il n'étoit pas découpé par anneaux. Il avoit seulement des rayes ou plis perpendiculaires à sa longueur, selon laquelle une autre grande raye alloit depuis la tête jusqu'à la queuë, en le divisant en deux moitiés égales. Il étoit entier, & avoit 2 pieds $\frac{1}{2}$. On ne sait pas qu'il se soit encore trouvé de Ténia dans des Poissons.

V.

Une Religieuse a eu pendant 18 ans une grosseur de ventre si énorme, qu'outre les bandes qui lui étoient necessaires pour le soûtenir, il falloit, quand elle vouloit marcher, que deux Religieuses marchassent en arriere devant elle, & lui aidassent à porter son fardeau. Enfin elle mourut à l'âge de 49 ans dans de grandes douleurs, & on l'ouvrit. Dès qu'on eut levé la peau du ventre, & avant qu'on en ouvrît la cavité, il se presenta un grand sac qui prenoit sa naissance de

de l'Ombilic, & defcendoit jufque fur les genoux. Il étoit plein de quantité de corps fort differens, les uns comme des pains de favon, les autres comme de gros morceaux de chair, les autres comme des pierres de plâtre couvertes de quelques membranes. Il s'y trouva auffi trois Veffies de la longueur d'environ un pied, pleines en partie d'une eau jaune prefque huileufe, & en partie de matieres auffi dures que des pierres. Ces Veffies n'étoient attachées à rien, que vers leurs embouchures. Il faut remarquer qu'entre la peau & les Mufcles qui étoient prefque entierement confumés avec leurs teguments communs, on avoit trouvé quantité d'autres petites pierres dures comme des morceaux de carreau blanc, dont il y en avoit un qui pouffoit des pointes comme des molettes d'Eperon. La cavité du Ventre étant ouverte, on vit les Boyaux envelopés dans un autre grand fac, qui prenoit fon origine de la premiere des Vertebres des Lombes, où il étoit fortement attaché. Il étoit rempli de corps étrangers tout femblables aux premiers, & de trois ou quatre pots d'eau jaune. Le Diaphragme étoit fort preffé par ce fac, & le Cœur prefque aplati. C'eft M. *Lemery* dont l'Academie tient ces faits très-remarquables, non pas tant par l'efpece de ces generations, que par leur monftrueufe grandeur.

VI.

M. *Méry* a dit qu'ayant ouvert un Homme qui étoit mort en un inftant, il lui avoit trouvé l'Aorte tellement dilatée qu'elle avoit commencé à fe détacher de la bafe du Cœur, & à l'abandonner. Dans le moment, plus de circulation.

VII.

Nous avons parlé dans l'Hist. de 1700 * d'une Hydropisie laiteuse; croiroit-on aisément qu'une chute sur la tête en pût causer une? Quel rapport de cet accident à cette maladie? Cependant nous allons faire voir par quel enchaînement cela peut arriver. Nous mêlerons les faits qu'a observés M. *Littre* aux explications qu'il en a données.

Une Fille de 7 ans qui se portoit parfaitement bien étant tombée sur la tête, les parties du Cerveau s'affaisserent par la commotion du coup, & d'autant plus facilement qu'elles étoient encore fort molles. La cavité des tuyaux diminua, le sang qui n'y couloit plus librement donna lieu à sa serosité de se séparer, & de s'échaper par les pores des vaisseaux en entraînant avec elle une partie de ses sels, qui picotoient les membranes & causoient de grands maux de tête. La tension violente des vaisseaux, où le sang séjournoit trop, y contribuoit encore. Mais le plus grand mal étoit que par l'embarras & le desordre des parties du Cerveau la filtration des Esprits ne s'y faisoit plus ni assez abondamment ni assez regulierement. Aussi la jeune Fille qui auparavant étoit fort vive & fort gaye devint-elle pesante, triste, & assoupie. Elle vomissoit quelquefois & avoit du dégoût pour les aliments, parceque les Esprits ne se répandoient plus dans l'Estomac comme il eût été necessaire. De la mauvaise disposition de l'Estomac s'ensuivirent les mauvaises digestions, & l'imperfection, & sur tout la grossiereté du Chile, peu animé d'Esprits

* p. 15. & suiv.

prits. Ce Chile épais avoit de la peine à entrer dans les Veines Lactées, vaisseaux fort déliés, qui se glissent entre les deux membranes du Mesentere, & vont se rendre à ses Glandes. Une partie du Chile qui ne pouvoit penetrer dans ces petites routes, suivoit donc celle du Canal intestinal, incomparablement plus large, & qui porte les excrémens, & la Malade eut ce que les Medecins appellent *Passion Cœliaque*, c'est-à-dire qu'avec les excrémens il sortoit du Chile. Comme de ce côté-là il s'en perdoit beaucoup, & que de l'autre ce qui en restoit pour la nourriture des parties étoit trop épais, & peu propre à les nourrir, la Malade tomba dans une maigreur extraordinaire. Les membranes du Mesentere se dépouillerent peu à peu de toute la graisse qu'elles contiennent naturellement, qui les tient séparées l'une de l'autre, & envelope les vaisseaux lactées. Delà il arriva que quand ces Vaisseaux se furent gonflés à la longue de Chile amassé, & se creverent, le Chile qui s'épancha entre ces membranes, & qui leur causoit une tension violente, parcequ'elles étoient extrêmement rapprochées, eut la force de les percer en plusieurs endroits, après quoi il tomba dans la cavité du ventre, & forma l'Hydropisie laiteuse. Alors la passion cœliaque cessa, parceque le Chile qui avoit forcé tous les obstacles trouvoit beaucoup de facilité à entrer dans les veines lactées, & n'étoit plus obligé à prendre le chemin du Canal intestinal. Le Chile qui s'étoit amassé dans les Glandes du Mesentere les grossit beaucoup au-delà du naturel, & s'y petrifia même en maniere de

craye. Le Canal Thorachique où il ne passoit presque plus de cette liqueur, devint extrêmement menu & délié. On fit une fois la ponction à la Malade, & on lui tira 6 ou 7 pintes de ce Chile extravasé. Elle mourut au bout de 15 jours, ayant encore dans la cavité du ventre une pareille quantité de la même liqueur. Sa maladie dura 4 mois.

VIII.

On doit être assez surpris de voir qu'un petit corps assez exactement ovale, & dont le grand diametre qui est d'une ligne & plus est au petit comme 3 à 2, qui a une surface fort polie de couleur de Caffé rôti, avec une petite bande de gris de perle au milieu, & qui sur ces apparences ne doit guere être pris pour un Animal; mais tout au plus pour un Oeuf, ne fasse cependant que sautiller dans un Jardin, en s'élevant d'un demi pouce, & s'élançant quelquefois jusqu'à deux. Quand on le veut faire sauter, on n'a qu'à l'exposer au Soleil, ou le mettre sur la main lorsqu'elle est chaude. M. *Carré*, à qui cette observation est dûë, ouvrit la coque d'un de ces petits corps; elle est épaisse & solide par rapport à leur grosseur, aussi faut-il qu'elle le soit pour résister à leurs sauts, & elle renferme un petit Ver fort blanc, dont le dos est coupé d'anneaux transversaux & paralleles, & le Ventre fort plat, & sans pieds. On apperçoit du côté de la tête deux petits points noirs. Comme la figure de son ventre empêche qu'il ne remplisse entierement sa coque, il a de l'espace pour y faire un saut en ramassant son corps, & en le débandant ensuite promptement. C'est par-là qu'il éleve

sa maison en l'air. Il doit être fort vigoureux, car cette maison est par rapport à lui un fort grand poids, qu'il éleve fort haut, & pousse fort loin, & cela fort souvent. M. *Carré* en garda un deux mois dans une boëte sans y apercevoir aucun changement. Ce petit Animal est une Enigme assez difficile à expliquer. Comment se nourrit-il dans cette coque si bien fermée? comment se multiplie-t-il dans cette prison? car quand même il se multiplieroit à la maniere des Moules *, comment ses œufs sortiroient-ils?

* V. ci-dessus p. 41.

NOus renvoyons entierement aux Memoires

* L'Ecrit de M. *Geoffroy* le jeune sur les Bezoards,

† Et celui de M. de *Reaumur* sur un Insecte des Limaçons.

* V. les M. p. 314. † V. les M. p. 410.



CHIMIE.

SUR LA RHUBARBE.

* LA Rhubarbe ne pouvoit manquer de trouver sa place parmi les Purgatifs que M. *Boulduc* a entrepris d'examiner †. Il l'a étudiée à son ordinaire avec les deux grands Dissolvants, l'Eau & l'Esprit de vin. La teinture qu'il en a tirée par l'Eau a été beaucoup plus forte que celle qui étoit venuë par l'Esprit de vin, marque assûrée que la qualité purgative de la Rhubarbe réside plus dans ses Sels que dans ses Souffres, qui ne sont qu'en très-petite quantité. Peut-être même le peu de teinture que tire l'Esprit de vin est-il uniquement tiré par le flegme qui lui reste toûjours, quelque soin qu'on ait pris à le bien rectifier. Ce flegme dissout dans un Mixte la petite quantité de Sels proportionnée à sa quantité.

Puisque l'Esprit de vin tire si peu de la Rhubarbe, il est naturel qu'après avoir essuyé cette *extraction* elle n'en soit pas sensiblement moins purgative, & que l'Eau puisse encore beau-

* V. les M. p. 217.
† V. les Hist. de 1700. p. 59. de 1701. p. 72. de 1702. p. 58. de 1705. p. 78. de 1708. p. 65.

beaucoup agir ſur elle, & c'eſt en effet ce que M. *Boulduc* a obſervé.

Et la teinture tirée par l'Eau, & l'Extrait ſolide fait de cette teinture, purgent fort bien. Cette vertu purgative ſubſiſte encore, mais aſſez affoiblie, dans une ſeconde teinture & dans ſon Extrait. Mais ce qui purge encore mieux & que ces teintures & que ces Extraits, c'eſt la Rhubarbe en ſubſtance. Un effet de l'Art eſt de reconnoître en quelles occaſions il eſt inutile.

Une remarque générale de M. *Boulduc* en cette matiere, & qui donne encore la préference à la Nature ſur l'Art, c'eſt que les infuſions des Purgatifs Vegetaux ont conſiderablement plus d'effet que les décoctions, où la chaleur enleve trop de principes.

Quoique la Rhubarbe produiſe ſur la langue ce ſentiment d'âpreté, d'où l'on conclut ordinairement qu'un Mixte eſt aſtringent, M. *Boulduc* n'a pû s'aſſurer par aucune experience qu'elle eût effectivement cette vertu dans ſon operation.



SUR LA LACQUE.

LE P. *Tachard* Jeſuite, Miſſionnaire aux *Indes Orientales*, envoya de *Pondichery* à M. *de la Hire* en 1709 deux petits Memoires ſur differentes particularités de l'Hiſtoire naturelle des *Indes*. Ce qu'il y avoit de plus circonſtancié, & en même temps de plus intereſſant pour l'Academie, regardoit la Lacque.

On donne ce nom à plusieurs especes de pâtes seches dont les Peintres se servent, mais ce qu'on appelle plus proprement Lacque est une Gomme ou Resine rouge, dure, claire, transparente, fragile, qui vient du *Malabar*, de *Bengale*, & de *Pegu*.

Selon les Memoires du P. *Tachard*, de petites Fourmis rousses s'attachent à differents Arbres, & laissent sur leurs branches une humidité rouge, qui se durcit d'abord à l'air par sa superficie, & ensuite dans toute sa substance en 5 ou 6 jours. On pourroit croire que ce n'est pas une production des Fourmis, mais un suc qu'elles tirent de l'Arbre en y faisant de petites incisions, & en effet si on pique les branches proche de la Lacque il en sort une Gomme, mais il est vrai aussi que cette Gomme est d'une nature differente de la Lacque. Les Fourmis se nourrissent de fleurs, & comme les fleurs des Montagnes sont plus belles & viennent mieux que celles du bord de la Mer, les Fourmis qui vivent sur les Montagnes sont celles qui font la plus belle Lacque, & du plus beau rouge. Ces Fourmis sont comme des Abeilles, dont la Lacque est le Miel. Elles ne travaillent que 8 mois de l'année, & le reste du temps elles ne font rien à cause des pluïes continuelles & très-abondantes.

Pour préparer la Lacque, on la sépare d'abord des branches où elle est attachée, on la pile dans un Mortier, on la jette dans l'eau bouillante, & quand l'eau est bien teinte, on en remet d'autre jusqu'à ce qu'elle ne se teigne plus. On fait évaporer au Soleil une partie de l'eau qui contient cette teinture, après

après quoi on met la teinture épaissie dans un linge clair, on l'approche du feu, & on l'exprime au travers du linge. Celle qui passe la premiere est en gouttes transparentes, & c'est la plus belle Lacque. Celle qui sort ensuite & par une plus forte expression, ou qu'on est obligé de racler de dessus le linge avec un Couteau, est plus brune, & d'un moindre prix.

Ces faits rapportés dans l'Academie firent naître à M. *Lémery* la pensée d'examiner Chimiquement la Lacque. Il s'agissoit de savoir si c'étoit une Gomme ou une Resine. Ces deux Mixtes, quoiqu'assez semblables, different en ce que le Souffre domine dans les Resines, & le Sel ou l'Eau dans les Gommes.

Il trouva que l'Huile d'Olive ne dissolvoit point la Lacque, & n'en tiroit aucune teinture, que l'Huile étherée de Terebenthine & l'Esprit de vin n'en tiroient qu'une legere teinture rouge, ce qui fait voir que la Lacque n'est pas fort resineuse, & n'abonde pas en souffre; que d'ailleurs une liqueur un peu acide, comme l'eau Alumineuse en tiroit une teinture plus forte, quoiqu'elle n'en fît qu'une dissolution fort legere, & que l'Huile de Tartre y faisoit assez d'effet, ce qui marque qu'elle a quelque partie saline, & qu'elle est imparfaitement gommeuse, & que par conséquent c'est un Mixte moyen entre la Gomme & la Resine.

Il est à remarquer que les liqueurs acides foibles tiroient quelque teinture de la Lacque, & que les fortes, comme l'Esprit de Nitre, & l'Esprit de Vitriol, n'en tiroient aucune.

Cependant la Lacque qui ne leur donnoit point de couleur, y perdoit en partie la sienne, & devenoit d'un jaune pâle. La Physique est trop compliquée pour nous permettre de prévoir sûrement aucun effet par le seul raisonnement.



SUR LES SOUFFRES DES VEGETAUX ET DES MINERAUX.

* MAlgré la difference extrême des Vegetaux & des Mineraux, M. *Homberg* est persuadé que c'est le même Souffre qui entre dans la composition des uns & des autres. Ses experiences du Verre ardent rapportées dans l'Hist. de 1709 † prouvent que des Metaux privés de leur Souffre, & devenus par-là incapables de se fondre, reprennent très-aisément un Souffre vegetal, & avec lui leur fusibilité, & leur forme metallique. Il n'en faudroit pas davantage pour établir l'*identité* du Souffre dans ces deux especes de Mixtes, mais M. *Homberg* y ajoûte encore qu'un Souffre metallique peut passer dans une matiere vegetale, & en faire une Huile, aussi-bien qu'un Souffre vegetal passe dans une matiere metallique, & en refait un Metal. Après ce passage réciproque, il ne peut plus y avoir rien à desirer.

La

* V. les M. p. 302. † p. 46. 47.

La fumée qui sort des Metaux fondus au Miroir ardent est leur Souffre, mais comme elle se dissipe en l'air, on n'en sauroit rien faire. Il n'y a que le Fer & l'Etain qui fondus ensemble jettent une fumée si épaisse qu'on la peut ramasser. Elle se met en une espece de Cotton. Voilà donc le Souffre de ces deux Metaux que l'on tient, & même pour en avoir une plus grande quantité, M. *Homberg* se contente de fondre ensemble au Miroir le Fer & l'Etain, il les retire aussi-tôt sans leur donner le loisir de jetter leur fumée, il y remet d'autre Fer & d'autre Etain, & ainsi de suite tant qu'il veut, après quoi il met dans un Creuset fort vif toutes ces portions refroidies. Elles s'y refondent, & jettent leur fumée qui s'épaissit en Cotton sur les parois du Creuset, où elle s'attache. On la ramasse, & on la met dissoudre à froid dans du Vinaigre distillé, que l'on a eu soin de dépouiller de son Huile, autant qu'il étoit possible. Ce Vinaigre devient rougeâtre, gras, plus épais qu'il n'étoit, & enfin si on le distille en cet état il donne après beaucoup de Flegme une veritable Huile, qui s'enflame aussi facilement & aussi vivement que l'Esprit de vin, & nage sur l'eau comme les Huiles essentielles des Plantes. Où le Vinaigre a-t-il pris cette Huile, si ce n'est dans la matiere cottoneuse & metallique?

Il est vrai qu'on pourroit le soupçonner d'en contenir toûjours un peu, mais pour lever entierement ce scrupule M. *Homberg* a fait la même operation avec de l'Esprit de Vitriol, moins suspect que le Vinaigre dis-

diſtillé de contenir aucune Huile, & le ſuccès a été parfaitement le même.

C'eſt une choſe aſſez particuliere que le Vinaigre ne diſſolve la matiere cottoneuſe qu'à froid; il ne feroit rien avec le feu. Ce n'eſt pas la grande force d'un Agent qui fait un certain effet, c'eſt ſa proportion au ſujet ſur lequel il agit.

M. *Homberg* ayant remarqué que le Zink, Mineral dont la nature eſt aſſez peu connuë, jettoit au Miroir ardent les mêmes fumées que le mêlange du Fer & de l'Etain, s'aviſa de l'employer aux mêmes operations que ce mêlange, & trouva précisément les mêmes effets. Delà il a conclu avec beaucoup de vrai-ſemblance que le Zink pourroit bien n'être qu'un mêlange naturel de Fer & d'Etain, & il confirme encore cette penſée par quelques autres apparences. Ainſi la connoiſſance de ce Mineral ſera un fruit comme ſurnumeraire des découvertes que M. *Homberg* a faites ſur les Souffres Vegetaux & Metalliques.

SUR



SUR L'ANALYSE DES PLANTES MARINES, ET PRINCIPALEMENT DU CORAIL ROUGE.

C'Eſt une partie conſiderable du grand travail de M. le Comte *Marſigli* *, que ſes experiences Chimiques ſur les Plantes de la Mer. Nous donnerons dans la Botanique quelque idée de leurs differentes eſpeces, ou plutôt de leurs differents genres, nous la ſuppoſons ici, & d'autant plus facilement qu'elle n'y eſt pas neceſſaire.

Quoique les Plantes de terre ſoient ſi ſemblables dans leurs Analyſes, qu'il ſeroit difficile de diſtinguer par-là, & encore plus de prévoir leurs differents effets, celles de Mer paroiſſent encore plus ſemblables. En effet les Plantes terreſtres vivent en differents terroirs, d'où elles peuvent & même doivent tirer differentes nourritures, les Plantes marines n'ont toutes qu'un même aliment, cette eau ſalée & bitumineuſe, qui les embraſſe de toutes parts, les penetre, & les fait vegeter. Auſſi M. *Marſigli* a-t-il trouvé dans leurs Analyſes une grande uniformité, preſque toûjours la même ſalure, & la même amertume, toûjours un ſuc fort glutineux qui les nourrit, beau-

* V. ci-deſſus, p. 30.

beaucoup d'Alkali, peu d'Acide; encore croit-il que les Plantes marines qui ont un peu d'Acide ſenſible ſont venuës à une petite profondeur, parceque ſelon lui il n'y en a que dans les eaux ſuperficielles. Ces Plantes ont beaucoup de Sel volatil, & même, ce qui eſt remarquable, les *pierreuſes*. Les Lithophytons en ont une 5me partie plus que la Corne de Cerf, quoiqu'ordinairement cet Eſprit abonde davantage dans les Animaux.

Le ſuc glutineux ne ſe tire que des Plantes fraîches, du moins des pierreuſes, car il ſe durcit quelque temps après qu'elles ſont ſorties de l'eau. Il ſort par une ſimple expreſſion des extremités encore molles de leurs branches. Il eſt d'une couleur differente en differentes Plantes, blanc, ou jaune le plus communément. Il a auſſi differentes ſaveurs, tantôt un goût de mer âcre & piquant, tantôt un goût de Poiſſon corrompu, &c.

Comme le Corail eſt la plus noble de toutes les Plantes de la Mer, car on ne peut plus douter que ce ne ſoit une Plante, M. *Marſigli* voulut l'étudier avec un ſoin particulier, & d'autant plus que le Corail frais, & contenant encore ſon ſuc glutineux en conſiſtence de lait, n'avoit juſque-là été travaillé par aucun Chimiſte.

D'abord il laiſſa pendant 12 jours ſon Corail frais dans un vaiſſeau plein d'eau de mer, ce qui lui valut, comme nous le dirons ailleurs, la curieuſe découverte des fleurs inconnuës de cette Plante. Au bout de ce temps, ces fleurs ſe réduiſirent en de petites boules, & puis tomberent au fond du vaiſſeau. Enſuite l'Ecorce, car ce Corail avoit

la

la ſienne, au lieu que celui qu'on expoſe ordinairement en vente ne l'a pas, commença à ſe ramollir, & à ſe ſéparer en pluſieurs petites pieces, qui ſe précipitant au fond du vaſe, s'y unirent en une bouë très-fine, ſemblable à celle du Bol rouge. La Plante ainſi dépouillée de ſon écorce, par où elle tire ſa nourriture, ſe pourrit, & tomba.

A meſure que l'écorce ſe ſéparoit, le Lait qui coule entre elle & la ſubſtance de la Plante pour la nourrir, tomboit dans l'eau, & la rendoit puante. Mais en moins d'un mois tout ce lait ſe dégagea d'avec l'eau, monta ſur ſa ſuperficie, & y forma une toile glutineuſe, épaiſſe comme le dos d'un Couteau, & blanche comme de la Gelée. L'eau reprit ſon premier goût, & ſon odeur ordinaire de mer. Tous les Eſſais Chimiques firent voir que cette gelée étoit une ſubſtance Alcaline.

L'Eſprit de vin bien rectifié ne tira rien du Corail pendant deux mois entiers, pas même la moindre teinture de rouge. Seulement après quelques heures d'infuſion, il parut aux extremités de certains petits Tubules qui ſont ſur l'écorce, de petits Globes qui augmenterent pendant 3 jours, demeurerent pluſieurs jours en cet état, & enſuite commencerent à diminuer, & diſparurent. Les plus gros l'étoient deux fois comme un grain de Millet. Ils étoient de la couleur du Mercure bien purgé.

Le lait de Vache frais ſur un feu très-lent tire peu à peu & par degrès la belle teinture rouge du Corail, ſoit qu'il ait ſon écorce, ſoit qu'il ne l'ait pas, & ne lui laiſſe qu'un

qu'un blanc livide. La Cire blanche bien fine fait le même effet, & plus promptement.

Voilà ce qu'on appelle *Teintures de Corail.* Sa couleur, assez semblable à celle du sang, avoit persuadé aux Anciens qu'il devoit être merveilleux pour le purifier, & que c'étoit un grand Cordial dans toutes les maladies, où il y avoit du venin, & de la malignité. Tout ce qui pouvoit un peu appuyer cette idée si legerement prise, c'est qu'en effet on avoit vû que le Corail arrêtoit le sang, comme font tous les Alcalis terreux. Cela même avoit produit une superstition de Medecine, on portoit sur soi du Corail comme un *Amulete* pour les saignemens de nés, & les autres hemorragies, & cette superstition n'est pas encore entierement détruite. Mais comme la couleur rouge étoit la source de tant de vertu, il eût été extrêmement avantageux de la pouvoir tirer de ce Mixte, & d'en laisser tout le reste comme un marc inutile, & ce secret a été cherché par plusieurs Chimistes anciens & modernes avec autant de soin & de peine que celui de l'Or potable.

La grande importance dont il étoit ne leur permettoit pas de croire qu'ils le pussent trouver dans des choses simples, ni d'une maniere aisée. Ils ont imaginé quantité d'operations, la plûpart fort differentes entre-elles, & fort recherchées, & ils les ont données comme ayant réüssi. Cependant M. *Lémery* a assuré qu'il les avoit éprouvées toutes sans succès, & il chercha, il y a déja long-temps, la Teinture de Corail par d'autres moyens; il la crut digne de cette peine, non par

par les grands uſages qu'elle devoit avoir dans la Medecine, mais par l'erreur générale, où l'on étoit en ſa faveur. Il ne ſongea qu'à des Diſſolvants ſimples, & il trouva la Cire blanche, ainſi qu'il le marqua dans la premiere Edition de ſon *Traité de Chimie* en 1675.

Mais à l'occaſion des experiences de M. le Comte *Marſigli*, qui diſoit même qu'il n'avoit eu ni le loiſir, ni les matieres neceſſaires pour en faire autant qu'il eût deſiré, M. *Lemery* reprit ce ſujet, & le traita avec plus d'étenduë. Il n'a travaillé que ſur du Corail tiré de la mer depuis long-temps, & dépouillé de ſon écorce.

Mis en entier dans de la Cire blanche fonduë par un petit feu, il y eſt devenu blanc juſque dans le fond de ſa ſubſtance, & même plus blanc dans ce fond que dans ſa ſuperficie, où il étoit un peu plus pâle, apparemment parcequ'il y prenoit quelque choſe de la couleur de la Cire. Seulement il ſe trouvoit quelquefois des branches noirâtres, mais elles ne l'étoient que par dehors, & le dedans en étoit parfaitement blanc. Il paroît que cette noirceur exterieure ne pouvoit venir que de quelque diſpoſition accidentelle. Le Corail blanchi n'en étoit ni moins dur, ni moins compacte, ni moins peſant. Une ſeconde infuſion du même Corail dans de nouvelle Cire le rendoit un peu moins blanc, peut-être en tiroit-il alors un peu de jaune.

La Cire de la premiere infuſion n'étoit que jaunâtre, & de couleur *citrine*. Si l'on y mettoit de nouveau Corail elle devenoit rougeâtre, & le Corail n'en devenoit pas moins blanc,

blanc, que si on l'eût mis dans de la Cire *neuve*. Un troisiéme morceau de Corail mis dans la même Cire la rendoit noirâtre, & devenoit toûjours également blanc.

La Cire où l'on met du Corail déja blanchi par une infusion, ne change aucunement de couleur.

Tout cela prouve assez évidemment & que la Cire ne porte point sa couleur dans le Corail, mais lui ôte celle qu'il avoit, & que cette couleur du Corail, quoiqu'elle le penetre intimement, est fort legere, & fort subtile, & que le Corail est naturellement blanc; en effet il s'en trouve de cette couleur au fond de la mer.

M. *Lémery*, à l'exemple des Geometres, qui augmentent souvent de gayeté de cœur la difficulté des Problêmes qui leur ont été proposez, s'en est proposé un second plus difficile, c'étoit de retirer de la Cire la teinture de Corail qu'elle avoit prise. Le seul Dissolvant qu'il y ait trouvé propre, a été de l'Eau de vie empreinte de Sel de Tartre. Il y a mis en digestion chaudement pendant dix jours de la Cire teinte par trois infusions, elle y est redevenuë blanchâtre, & la Teinture rouge du Corail a passé à l'Eau de vie. Si cette Teinture est medicinale, c'est en ce dernier état qu'on la peut prendre.

La Cire jaune fait le même effet que la blanche, mais un peu moins facilement, & elle teint legerement de sa propre couleur la superficie du Corail.

L'Esprit de Cire rectifié, qui est un flegme fort impregné d'Acides, tire du Corail une teinture rouge foncée, mais ce n'est que celle
de

de sa superficie; il ne touche point du tout au dedans.

Plusieurs autres Dissolvants ont encore reüssi à M. *Lémery*, mais c'étoit sur du Corail bien broyé, & réduit en poudre très-fine, ce qui lui fait déja perdre quelque petite partie de son rouge. Après avoir essayé inutilement des sucs dépurés de quelques fruits, comme celui de Coing, celui de Pomme, le Verjus, le Vinaigre blanc, il trouva enfin que le suc de Citron faisoit parfaitement ce qu'il souhaitoit, pourvû qu'il ne fût pas distillé, mais au contraire un peu trouble, & qu'il contînt toute sa partie huileuse & tartareuse, qui est la plus propre à extraire une teinture bitumineuse & grasse. Celle qui vient du Corail par ce moyen est si legere & si volatile, qu'en deux mois elle s'envole entierement du suc de Citron, & le laisse avec sa premiere couleur, à moins qu'il ne soit dans une Bouteille bien bouchée, & couvert d'Huile d'Amandes douces à la hauteur d'un doigt. Quand le suc de Citron s'est chargé de la couleur rouge du Corail, il ne fait plus aucun mouvement ni avec l'Huile de Tartre, ni avec l'Esprit de Vitriol, parceque l'Acide du Citron s'étant uni à l'Alcali du Corail, il n'y a plus lieu à l'action ni de l'Huile de Tartre sur l'Acide du Citron, ni de l'Esprit de Vitriol sur l'Alcali du Corail.

L'Esprit de Miel rectifié tire la Teinture du Corail, & perd son goût acide, ainsi qu'il doit arriver. Cependant tout Alcalin qu'est le Corail, certains Alcalis, comme l'Huile de Tartre, la liqueur de Nitre fixe, l'Esprit volatil de Sel Armoniac, ne laissent pas d'être

des

des Dissolvants propres à extraire sa teinture. L'Esprit de Sel Armoniac ne prend qu'une couleur gris de lin.

L'Eau de vie, l'Esprit de vin, les Huiles d'Olive, de Noix, d'Aveline, d'Amande, des Semences froides, ne font rien.

M. *Lémery* n'a pû réüssir à faire une Teinture sèche.

Après les Teintures du Corail, l'ordre naturel demande que l'on passe aux Analyses de la propre substance de ce Mixte.

M. le Comte *Marsigli* commença par examiner le suc laiteux exprimé de l'Ecorce. Mis dans de l'eau de mer il se précipite au fond. Il donne une teinture jaune & livide à l'Esprit de vin, & si on fait évaporer ce mêlange, le marc qui reste a un goût de Poisson gâté. Les Esprits de Sel & de Nitre fermentent avec ce Lait jusqu'à produire de la fumée. L'Esprit de Sel Armoniac & l'Huile de Tartre n'y font aucun changement, toutes preuves d'une substance alcaline.

Le Corail qui n'est nourri & formé que de lait doit donc être de cette même substance, & en son écorce, & en sa partie plus dure. C'est en effet ce que toutes les operations ont donné & à M. le Comte *Marsigli*, & à M. *Lémery*, & nous ne nous y arrêterons pas davantage, sur tout M. *Lemery* ayant presque épuisé dans son Traité de Chimie tout ce qui regarde les Dissolutions & le Magistere du Corail.

Nous remarquerons seulement que dans la Distillation du Corail fraîchement tiré de la Mer, il paroît un flegme laiteux, & de petites parcelles de bitume flotantes, que l'on
ne

ne voit point dans la diſtillation du Corail gardé quelque temps. C'eſt une remarque de M. *Marſigli.*

Il dit qu'ayant des crudités d'Eſtomac il s'en eſt gueri avec la poudre des extremités des branches de Corail frais, encore pleines de leur lait peu deſſeché. Puiſque le Corail eſt un Alcali, il doit être bon pour abſorber les Acides, & M. *Lémery* a jugé avec beaucoup d'apparence qu'il devoit être beaucoup meilleur étant ſimplement réduit en poudre, qu'après avoir paſſé par des operations Chimiques, où il s'eſt chargé d'Acides, qui ont déja conſumé une bonne partie de ſa vertu.



SUR UN NOUVEAU PHOSPHORE.

ON appelle *Phoſphore* tout ce qui rend de la lumiere par quelque préparation artificielle, & on a même étendu ce nom aux Barometres dont la partie vuide d'air eſt lumineuſe lorſqu'on les ſecouë dans l'obſcurité. Tous les Phoſphores que l'on connoît juſqu'à preſent ont quelque ſorte d'imperfection, qui, pour ainſi dire, diminuë leur gloire. Celui qui ſe fait avec l'urine a beſoin d'un peu de chaleur étrangere pour luire & pour s'enflamer; le *Smaragdin* en demande beaucoup; la Pierre de *Bologne* & le Phoſphore de *Balduinus* ne font leur effet que pendant le jour; les

les Huiles diſtillées de Giroffle, de Canelle, de Saſſafras, &c. ne s'enflament ſans feu que quand on y mêle de l'Eſprit de Nitre bien déflegmé ; le Phoſphore que M. *Homberg* a donné en 1692 dans les Memoires que l'Academie imprimoit alors, ne devient lumineux que quand on le frotte rudement, ou qu'on frappe deſſus avec un corps dur. Mais le même M. *Homberg* a trouvé un nouveau Phoſphore exempt de tous ces defauts. Il n'a beſoin ni du mêlange d'aucune matiere nouvelle, ni d'aucune chaleur, ni d'aucun mouvement ; il ne faut que l'expoſer à l'air, il s'enflame en une minute ou deux, met le feu à tout corps combuſtible qu'il touche, & ſon effet eſt égal la nuit & le jour.

C'eſt une Poudre ou noire, ou brune, ou rouge, ou verte, ou jaune, ſelon la maniere dont elle a été travaillée, & les degrés de feu qu'elle a eus. Elle eſt tirée de matiere fécale, étrange origine pour une lumiere ſi ſubtile & ſi celeſte. M. *Homberg* croit qu'il la tirera auſſi de l'urine, & même que l'urine traitée ſelon la methode qu'il vient de trouver donnera une plus grande quantité de Phoſphore que par la maniere ordinaire & connuë.

Il a fait de trois differentes ſortes de ſa Poudre. Toutes trois mettent le feu aux matieres combuſtibles, mais l'une ſans s'enflamer, l'autre en ne s'enflamant que comme un Charbon, la troiſiéme en s'enflamant comme une Bougie.

M. *Homberg* donnera la préparation de ſon Phoſphore, & une ſuite de pluſieurs operations très-curieuſes ſur la matiere dont il eſt for-

formé. Il paroît bien que rien n'est à negliger pour la Physique, & qu'elle sait trouver des Trésors par tout.

NOus renvoyons entierement aux Memoires

* L'Ecrit de M. *Homberg* sur les Vegetations artificielles.

* V. les M. p. 556.



BOTANIQUE.

SUR LE PAREIRA BRAVA.

PARMI les Drogues étrangeres apportées par M. *de la Mare*, dont nous avons parlé ci-dessus*, il y avoit du *Pareira brava*. Ce nom est *Portugais*, & signifie *Vigne sauvage*. C'est une Racine qui vient du *Bresil*, où l'on dit que les Naturels du Païs l'appellent *Botou*, ou *Botoüa*. Nons ne connoissons point le reste de la Plante, & nous ne savons que par le rapport des *Portugais* que ce soit une Vigne.

Cette Racine n'a point été connuë de *Pison*, dont l'Histoire naturelle du *Bresil* fut imprimée en 1648. M. *Amelot* Conseiller d'Etat,

* p. 20.

d'Etat, eſt le premier qui l'ait apportée en *France* au retour de ſon Ambaſſade de *Portugal* en 1688, comme M. *Nicot* Ambaſſadeur dans le même Royaume fut le premier qui nous en envoya le Tabac, peut-être avec trop de ſuccès. M. le Preſident *Rouillé*, ſucceſſeur de M. *Amelot* à l'Ambaſſade de *Portugal*, rapporta auſſi entre pluſieurs autres drogues rares du Pareira brava, avec un Memoire de quantité de vertus très-conſiderables que les *Portugais* lui attribuent.

A cauſe de ces vertus, M. *Geoffroy* qui s'étoit chargé du ſoin d'examiner tout ce qui avoit été apporté par M. *de la Mare*, eut une attention particuliere ſur le Pareira brava, qu'il connoiſſoit déja d'ailleurs, & qu'il avoit même éprouvé. En comparant tout ce qu'il avoit pû ramaſſer ſur l'hiſtoire purement Botanique de cette Plante, il forma pluſieurs doutes, & pluſieurs queſtions, ſi la Butua ou Brutua Plante *Indienne* dont *Giacomo Zanoni* avoit parlé dans ſon *Iſtoria Bottanica* en 1675, & qu'il dit venir dans le *Mozambique*, n'étoit pas la même que le Pareira brava, ſi une Plante que M. *de la Mare* a vûë dans l'Iſle de *S. Domingue* eſt effectivement le Pareira brava, ou le Raiſinier de cette Iſle, qui eſt aſſez connu, s'il y a deux eſpeces de Pareira brava, l'une qui vienne dans le *Breſil*, l'autre dans le *Mexique*, ou ſi toutes deux viennent du *Breſil*, &c. mais tout cela s'éclaircira avec le temps. Ces ſortes de doutes ſavans ſont plus propres à faire honneur à celui qui les propoſe, qu'à inſtruire ceux à qui ils ſont propoſés.

Nous nous en tenons preſentement à ce qui

qui eſt utile. M. *Geoffroy* a vû deux eſpeces de Pareira brava, ſi cependant la difference de couleur, qui eſt preſque la ſeule, ſuffit pour faire deux eſpeces. La 1re qui eſt la plus en uſage eſt brune par dehors, & d'un jaune brun en dedans, la 2de eſt blanche par dehors, & en dedans d'un jaune *citrin*. Celle-ci eſt de couleur de chair lorſqu'elle eſt recente, & pâlit avec le temps. Toutes deux ſont d'une ſubſtance dure, & cependant poreuſe & ſpongieuſe. Elles ont un goût amer mêlé de quelque legere douceur, comme la Regliſſe. Elles ſont quelquefois de la groſſeur du pouce.

Les *Portugais*, qui ont d'abord appris des Sauvages du *Breſil* les vertus de cette Racine, pourroient bien les exaggerer un peu, mais enfin ſans prendre au pied de la lettre tout ce qu'ils en racontent, ce que M. *Geoffroy* en a reconnu par ſa propre experience ſuffit pour la faire mettre au rang des Plantes les plus utiles. Il aſſure qn'elle ne manque guere de Coliques Nephretiques, non pas qu'il croie qu'elle va briſer la Pierre dans les Reins, ou dans la Veſſie, comme les *Portugais* le prétendent, mais c'eſt qu'elle diſſout les glaires qui collent enſemble dans les Reins les ſables & les graviers, dont ſe forment les Pierres, & en effet après avoir pris du Pareira brava on rend ordinairement beaucoup de ſable.

M. *Geoffroy* l'a donné encore fort heureuſement à des Malades affligés d'ulceres aux Reins, & à la Veſſie, & dont les urines étoient purulentes, & toutes glaireuſes, de maniere qu'elles ceſſoient ſouvent de pouvoir

 cou-

couler, ou ne couloient qu'avec beaucoup de peine. L'uſage du Pareira brava les délivroit promptement de ces ſuppreſſions, & les urines pendant ce temps-là n'étoient point ou très-peu épaiſſes; ce même remede nettoyoit les ulceres peu à peu, & en y joignant à la fin le Baume de *Copaña*, quelques Malades ont été entierement gueris.

Cette proprieté éprouvée du Pareira brava de fondre promptement & facilement les glaires, fit juger à M. *Geoffroy* qu'il ſeroit bon pour l'Aſthme *humoral*, qui eſt cauſé par une pituite épaiſſe & gluante dont les Bronches des Poûmons ſont ſurchargés, & dans la Jauniſſe qui vient d'une Bile fort épaiſſie; cette eſperance lui a ſouvent réüſſi, & ſur tout en deux occaſions remarquables, dont l'une apartient à la premiere maladie, & l'autre à la ſeconde.

Un Vieillard de 72 ans fort foible, & prêt à être ſuffoqué par une pituite qu'il ne pouvoit arracher de ſa poitrine, ayant pris 2 Verres d'infuſion de Pareira brava à une demiheure l'un de l'autre, jetta une ſi grande quantité de glaires & de flegmes, qu'il ſembloit vomir, & il fut entierement délivré de ſon accès.

Une femme tourmentée d'une violente Colique avec une douleur fort vive ſous le foye, eut en même temps une jauniſſe univerſelle, juſque-là que ſes urines, qui étoient fort épaiſſes, teignoient le linge en jaune. Les matieres que les lavements amenoient étoient en petite quantité, & blanchâtres. Après qu'elle eût été ſaignée du bras & du pied, M. *Geoffroy* lui fit prendre trois Verres d'in-

d'infuſion de Pareira brava à demi-heure l'un de l'autre. Peu de temps après le 3me Verre la douleur ceſſa, le ventre s'ouvrit, elle rendit des matieres fort jaunes, les urines coulerent abondamment, & s'éclaircirent. On continua de lui donner une priſe de Pareira brava de 4 heures en 4 heures, ſa couleur jaune s'effaça entierement, & en 24 heures elle parut parfaitement guerie. Depuis ce temps-là elle a reſſenti quelquefois ces attaques de Colique, & elle a eu recours au même remede, qui l'en a toûjours délivrée.

La doſe de cette racine eſt de deux gros coupés par petits morceaux, que l'on fait bouillir dans 3 demi-ſeptiers d'eau, juſqu'à ce que la liqueur ſoit réduite à Chopine. On coule cette décoction, & on la partage en 3 Verres que l'on fait prendre chauds comme du Thé avec un peu de ſucre. Pour préſerver ceux qui ſont ſujets à la gravelle, on leur en fait uſer tous les mois pendant 8 jours à la doſe de 24 grains ſeulement, qu'on fait bouillir legerement dans une taſſe d'eau. On peut donner auſſi cette racine en ſubſtance pulveriſée à la doſe de 12 ou 18 grains.

Des vertus ſi conſiderables ſûrement reconnuës dans le Pareira brava peuvent nous diſpoſer à croire avec les *Portugais* qu'il guerit la Dyſſenterie, les crachemens de Sang, l'Eſquinancie, les morſures des Bêtes venimeuſes, les Fiévres malignes, & que ſi c'eſt une ſuperſtition d'en porter, comme ils font, un morceau dans la bouche contre le mauvais air, c'eſt du moins une ſuperſtition pardonnable.



SUR LES ARBRES MORTS

PAR LA GELE'E DE MDCCIX.

LE rigoureux Hiver de 1709, dont la memoire durera long-temps, fit mourir par toute la *France* un nombre prodigieux d'Arbres, mais on remarqua que cette mortalité ne s'étendoit pas sur tous indifferemment. Ceux qu'on auroit jugé en devoir être les plus exempts par leur force, y furent les plus sujets. Les Arbres les plus durs & qui conservent leurs feuilles pendant l'hiver, comme les Lauriers, les Cyprès, les Chênes verds, & entre les autres qui sont plus tendres, comme les Oliviers, les Chataigniers, les Noyers, ceux qui étoient plus vieux & plus forts, moururent en plus grande quantité.

On chercha dans l'Academie la cause de cette bisarrerie apparente. M. *Cassini* le fils en donna une fort simple à l'égard des vieux Arbres. Il dit qu'il avoit remarqué que le grand froid avoit détaché leur écorce d'avec le bois, de quelque maniere que cela fût arrivé. Et en effet il est bien naturel que l'écorce soit plus adherente au bois dans les jeunes Arbres, beaucoup plus remplis de suc, & d'un suc plus huileux. Or comme selon l'opinion commune des Physiciens c'est principalement par l'écorce que les Arbres se nourrissent, il a dû arriver que ceux en qu elle

elle a perdu plus facilement la communication qu'elle avoit avec le bois, soient aussi morts plus facilement.

M. *Chomel* en imagina une autre raison, qui est générale. Il vint une très-forte gelée, & puis un dégel, ensuite une seconde gelée aussi forte que la premiere, & qui reprit très-brusquement. L'humidité du dégel dont les Arbres étoient remplis se gela donc, c'est-à-dire s'étendit & se dilata avec beaucoup de violence & de promptitude, & exerça sur les fibres & sur toutes les parties organiques des Arbres un effort d'autant plus grand, qu'elle y trouva plus de résistance. Or il est certain qu'elle en trouva davantage dans les Arbres les plus forts. Elle déchira donc, & détruisit ces parties organiques, fibres, vesicules, &c. & les rendit desormais inutiles à la vegetation.

Si on veut ajoûter à cela selon le Systême de M. *de la Hire* suivi par M. *Chomel*, que le froid consiste en certaines particules salines très-perçantes, l'action aura encore été plus forte, & l'effet plus grand.

Que les Arbres plus durs ou plus âgés ayent plus apporté de cette résistance, qui, pour ainsi dire, irrite l'Ennemi, il n'y a pas lieu d'en douter. Leurs parties sont necessairement plus serrées, & plus compactes, & c'est par cette raison qu'ils poussent leurs feuilles plus tard que les autres, tout le reste étant égal. Les dévelopemens en quoi consiste toute vegetation s'y doivent faire plus lentement, que dans ceux qui ont leurs parties plus molles, plus flexibles, plus impregnées de suc.

A l'égard des vieux Arbres, M. *Homberg* donna encore une raiſon particuliere de leur plus grande réſiſtance. Leurs fibres qui ont pris tout leur accroiſſement, & par conſéquent ſont étenduës en tout ſens autant qu'elles le peuvent être, ne ſauroient plus ſouffrir d'extenſion nouvelle, & réſiſtent puiſſamment à la rarefaction ſoit du ſuc aqueux qu'elles contiennent naturellement, ſoit d'une humidité étrangere. Il eſt viſible au contraire que les fibres des jeunes Arbres ont encore dequoi s'étendre, & prêtent beaucoup.

Pluſieurs Arbres qui ſembloient avoir échapé à ce cruel Hiver, parcequ'ils repouſſerent des branches & des feuilles à la ſéve du Printemps, ne purent profiter de celle de l'Autonne, & perirent tout à fait. Quand on les coupoit, on les trouvoit plus noirs & plus brûlés dans le cœur que vers l'aubier, & vers l'écorce. Le cœur qui eſt plus dur avoit été plus endommagé que l'aubier, & il étoit déja mort tandis que l'aubier conſervoit encore un petit reſte de vie.



SUR LE BLED CORNU

APPELLE' *ERGOT*.

IL vint à l'Academie en 1710 quelques Relations d'une Gangrene qui devenoit aſſez commune en certains Païs, ſurtout dans l'*Orleannois* & dans le *Bleſois*. M. *Noël* Chirurgien de l'Hôtel-Dieu d'*Orleans* fut celui qui

qui en écrivit avec le plus de détail. Il mandoit à M. *Méry* que depuis près d'un an il étoit venu à son Hôpital plus de 50 tant hommes qu'enfans affligés d'une Gangrene seche, noire, & livide, qui commençoit toûjours par les Orteils, se continuoit plus ou moins, & quelquefois gagnoit jusqu'au haut de la Cuisse, qu'il n'avoit vû qu'un seul Malade qui eût été attaqué à la main. A quelques-uns la gangrene se separoit naturellement, & sans qu'on y eût rien fait, aux autres elle se terminoit par le secours des scarifications & des Topiques; il y en eut 4 ou 5 qui moururent après l'amputation de la partie gangrenée, parceque le mal continua de monter jusqu'au Tronc. Ce qu'il y a de plus étonnant, c'est que cette maladie n'étoit point pour les femmes, tout au plus pour quelques petites filles.

On sut dans l'Academie que le même accident étoit arrivé encore, mais d'une maniere plus cruelle, à un Païsan d'auprès de *Blois*. La gangrene lui fit tomber d'abord tous les doigts d'un pied, ensuite ceux de l'autre, après cela le reste des deux pieds, & enfin les chairs des deux Jambes, & celles des deux Cuisses se détacherent successivement, & ne laisserent que les Os. Dans le temps qu'on en écrivit la Relation les cavités des os des Hanches commençoient à se remplir de bonnes chairs, qui renaissoient.

On est persuadé avec assez de vrai-semblance que cette étrange maladie, qui n'attaque guere que les pauvres gens, & dans les années de cherté, vient de la mauvaise nourriture, & principalement d'un certain Bled noir

& cornu, qu'on appelle *Ergot*, parce qu'effectivement il approche de la figure d'un Ergot de Coq. Voici comment M. *Fagon* premier Medecin du Roi, & Academicien Honoraire en explique la génération.

Il y a des Brouillards qui gâtent les Froments, & dont la plûpart des Epics de Seigle se défendent par leurs barbes. Dans ceux que cette humidité maligne peut atteindre & penetrer, elle pourrit la peau qui couvre le grain, la noircit & altere la substance du grain même. La séve qui s'y porte, n'étant plus resserrée par la peau dans les bornes ordinaires, s'y porte en plus grande abondance, & s'amassant irregulierement forme une espece de Monstre, qui d'ailleurs est nuisible, parce-qu'il est composé d'un mêlange de cette séve superfluë avec une humidité vitieuse.

Ce n'est que dans le Seigle que se trouve l'Ergot, & soit que les mêmes causes qui produisent la sterilité d'une année, le produisent aussi en plus grande quantité, soit que dans une mauvaise année les pauvres gens ne le séparent pas d'avec le bon grain dont ils ont fort peu, ce n'est que dans ces temps-là, & ce n'est que chez eux que l'on voit les gangrenes dont nous avons parlé. M. *Noël* disoit que comme le Seigle de la *Sologne* en 1709 contenoit près d'un quart d'Ergot, dès que les Païsans avoient mangé de ce méchant pain ils se sentoient presque yvres, après quoi venoit assez souvent la gangrene, & que dans la Beausse où il y avoit peu d'Ergot, ces accidens n'étoient point connus. On peut voir sur ce sujet une Lettre fort remarquable de feu M. *Dodart*, inserée dans le

le *Journal des Savans* de 1676 le 16 Mars.

L'Academie attentive au bien public en tout ce qui peut la regarder, écrivit à M. le Comte de *Pontchartrain* ce qu'elle ſavoit des mauvais effets du Bled cornu, afin qu'il eût la bonté d'y apporter l'ordre qu'il jugeroit à propos. Le Roi approuva cette attention, & ordonna à ce Miniſtre d'écrire à M. l'Intendant d'*Orleans* qu'il fît bien connoître aux Païſans de ſa Generalité le danger extrême de l'uſage de l'Ergot, & qu'il les obligeât à bien éplucher leur grain avant que de le faire moudre. Pour cela on lui envoya le Memoire que M. *Fagon* avoit fait ſur cette matiere.

En même temps, pour un plus grand éclairciſſement M. *de la Hire* le fils écrivit à un de ſes amis, bon Phyſicien, qui étoit à la campagne, & le pria de ſavoir à quoi les Fermiers attribuoient la production du Bled cornu, d'en nourrir des Poules, & d'obſerver ce qui leur arriveroit, d'en ſemer pour voir s'il leveroit. Il eut ſatisfaction ſur ces trois articles.

Cette mauvaiſe eſpece de grain vient en plus grande abondance dans les terres humides & froides, & dans les années pluvieuſes. Un certain Seigle particulier qu'on ſeme en Mars y eſt plus ſujet que ceux qu'on ſeme en Autonne.

Les Poules n'en veulent point dès qu'elles l'ont reconnu, & de quelque adreſſe qu'on ſe ſerve pour en mêler dans leur mangeaille, elles aiment mieux paſſer des trois jours ſans manger. Cependant il ne paroît point leur faire de mal, quand elles en ont mangé par-

ſurpriſe, & elles ne laiſſent pas de pondre à l'ordinaire.

Il ne leve point, ce qui eſt fort naturel, & en même temps heureux.



SUR LES MOUVEMENS

EXTERIEURS DES PLANTES.

LEs Mouvemens interieurs des Plantes ſont ceux qui font leur vegetation; les yeux ne les aperçoivent point, & la Raiſon a bien de la peine à en faire plus que les yeux. Mais les mouvemens exterieurs, ceux, par exemple, qui font que les Plantes pouſſent toûjours leur tige verticalement, qu'elles ſe tournent du côté du grand air, que leurs fleurs s'ouvrent ou ſe ferment en certaines circonſtances, &c. ſont viſibles, & cependant peu obſervés, ou s'ils le ſont, les cauſes en ſont peu connuës, peut-être parceque ces mouvemens exterieurs tiennent trop aux interieurs. M. *Parent* a entrepris de donner une idée générale de la Mechanique qui les produit, en ne ſuppoſant que ce qui eſt reçû de tout le monde ſur la vegetation.

Quand le ſuc nourricier eſt arrivé à l'extremité d'une Tige naiſſante, ſi l'on conçoit qu'il s'évapore, la peſanteur de l'air qui l'environne de tous côtés le fera monter verticalement, & s'il ne s'évapore point, mais qu'il ſe congele, & demeure attaché à cette extremité

mité par où il étoit prêt à sortir, la même pesanteur de l'air ne laissera pas de lui donner la même direction, de sorte que la Tige aura acquis une nouvelle partie fort petite posée verticalement. Il arrive alors la même chose à peu près que dans une Chandelle, qui quoiqu'elle fût posée obliquement à l'horison, auroit toûjours sa flame verticale par la pression de l'air. Les nouvelles gouttes de suc qui suivront cette premiere prendront la même direction, & comme toutes ensemble elles forment la Tige, elles la rendront donc verticale, à moins que quelques circonstances particulieres ne la détournent un peu.

A l'égard des Branches, que l'on peut supposer qui sortent lateralement de la Tige dans le premier Embryon de la Plante, quand même elles en sortiroient alors dans une direction horisontale, elles se releveroient en enhaut par la direction perpetuelle du suc nourricier, qui d'abord ne trouveroit aucune résistance dans une très-petite branche fort souple, & ensuite quoique la branche devînt plus ferme en croissant, agiroit avec plus d'avantage, parceque cette même branche plus longue seroit pour lui un plus long bras de Levier. La foible action d'une petite goutte de suc devient très-puissante & par sa continuité, & par le secours de ces circonstances favorables.

On sait que si une Aiguille mise de niveau sur un pivot vient à être aimantée, elle s'incline aussi-tôt du côté du Pole Arctique, & on en attribuë la cause à ce que la matiere magnetique qui sort de nôtre Hemisphere Sep-

tentrional va de bas en haut, & commençant à enfiler l'Aiguille aimantée lui fait prendre sa direction, & par conséquent la fait pancher vers le Pole, par rapport auquel elle est dirigée de bas en haut, comme le cours de la matiere magnetique. M. *Parent* prétend que par la même raison les sucs de la terre, qui vont de bas en haut enfiler une racine naissante, la font, pour ainsi dire, pancher en embas, & l'obligent à se diriger du côté de la terre, & c'est en effet dans cette situation qu'elle a le plus de facilité à les recevoir. On peut ajoûter à tout cela ce que nous avons dit dans l'Hist. de 1708 * après M. *de la Hire* sur la direction des Tiges & des Racines des Plantes.

Si la pression de l'air sur une Plante est inégale, elle déterminera les sucs à se porter du côté où elle sera la moindre, & à tourner de ce côté-là les branches ou la tige même. Ainsi une Plante enfermée ou dans une Chambre dont la fenêtre est ouverte, ou dans une Cave, se tournera d'elle-même du côté de la fenêtre ou du soupirail, comme si elle cherchoit le plus grand air, & cela en effet parceque ce plus grand air est plus dilaté, & fait une moindre pression. De même les Arbres en Espalier semblent fuir la muraille.

Il faut bien remarquer que toutes ces idées n'ont lieu que pour les jeunes Plantes, & qui croissent encore. Ce n'est qu'en ce temps-là qu'elles sont en état d'obéir au mouvement des sucs. Ils leur donnent un pli à mesure qu'ils les forment.

Et

* p. 81. & suiv.

Et ce n'est pas seulement à leurs sucs nourriciers que M. *Parent* donne ce pouvoir, mais encore à d'autres corpuscules tout à fait étrangers, qui cependant penetrent les Plantes. Ce sont ceux de la matiere magnetique. Il a été dit dans l'Hist. de 1703 * que M. *Parent* attribuë à la direction de leur cours le sens déterminé & presque toûjours le même dont se tournent tous les Corps qui se tournent, comme les Coquilles & les Tiges ou les Fleurs ou les Gousses de certaines especes de Plantes. Il y ajoûte presentement les Plantes foibles qui ont besoin de s'entortiller autour d'autres plus fermes, telles sont les differents Convolvulus, les Féves, le Houblon, &c. cet entortillement se fait dans presque toutes ces especes de gauche à droite en montant, & c'est-là le sens qui regne généralement dans tous les Corps *tournés* que nous observons. La matiere magnetique par une action legere, mais continuelle, a la même force sur les Plantes que les sucs nourriciers.

Que l'Heliotrope, les Soucis, les Martagons la Scabieuse argentée, la Digitale, &c. suivent le Soleil, c'est-à-dire se panchent toûjours vers lui, il est évident que cela vient en général d'un plus grand dessechement des parties tournées de ce côté-là, à quoi il faut qu'il se joigne quelques circonstances particulieres, comme la mollesse de la Plante, & le poids des feuilles ou des fleurs. Les parties que l'ardeur du Soleil a dessechées & affoiblies par une trop grande transpiration des sucs, l'humidité de la nuit, ou même quel-

* p. 17. & suiv.

quelquefois la seule absence des rayons du Soleil les doit rétablir dans leur premier état.

Ce raisonnement a lieu pour une cause telle que le Soleil, qui agit plus d'un côté de la Plante que de l'autre, mais non pas pour une cause dont l'action embrasseroit également toute la Plante; telle est l'humidité de la nuit, qui fait que de certaines fleurs, comme celles de tous les Convolvulus, d'une espece d'Ornithogale, &c. se ferment, & qu'au contraire celles des Belles de nuit, & de l'Arbre triste s'épanouïssent. Pour ces Phenomenes, qui quoiqu'opposez en apparence reviennent au même, il faut avoir recours à l'inégalité des parties de la Plante, plus ou moins extensibles d'un côté que de l'autre.

On peut imaginer dans les Plantes des tuyaux flexibles, creux, & comme cylindriques, qui étant remplis d'un fluide, quel qu'il soit, se gonflent, & s'accourcissent necessairement. Si quelques-uns de ces tuyaux sont noüés & resserrés d'espace en espace, ils s'accourciront beaucoup plus que ceux dont toute la cavité seroit également libre, parcequ'ils seront subdivisés en autant de petits tuyaux plus courts, dont chacun s'accourcira autant qu'auroit fait le tuyau entier. Outre les tuyaux creux, qui sont ou des fibres ligneuses, ou les interstices de ces fibres, on est persuadé qu'il y a dans les Plantes des *Utricules*, ou petits sacs disposés & arrangés le long des fibres ligneuses, ausquelles ils sont attachés. Il faut les concevoir comme faisant une colonne. Quand un fluide les gon-

fe,

fle, la colonne s'allonge, & elle s'accourcit quand ils sont vuides. C'est le contraire des tuyaux. Voilà, selon M. *Parent*, les principes de la differente extensibilité des parties des Plantes. Nous n'en ferons point l'application qui est facile, car on est assez le maître de placer où l'on veut en plus grande ou en moindre quantité les tuyaux, & les differens tuyaux, & les utricules; le Microscope le plus fin ne peut guere retrancher de cette liberté.

Quelquefois, ce qui peut surprendre d'abord, & paroître ne pas s'accorder avec ce qui vient d'être dit, la même partie d'une Plante est extensible en deux sens contraires, quoique la disposition des tuyaux & des utricules ne puisse pas changer. Ainsi quand la fleur de la Couronne Imperiale s'épanouït, son pedicule se courbe tout à fait en dehors, & quand la fleur est passée, il se recourbe en dedans. Mais la structure de ce pedicule ayant été établie par rapport à la premiere courbure qui se fait dans le temps de la fleur, une moindre quantité de suc qui après ce temps-là le gonfle moins d'un certain côté qu'elle ne faisoit auparavant, suffit pour faire entendre la courbure contraire.

Les mouvemens des Sensitives meriteroient presque un Traité à part. Dès qu'elles sont touchées ou par un vent un peu fort, ou par la pluye, ou par la grêle, ou par le bout d'un bâton, &c. elles plient leurs feuilles en dessus, & en appliquent exactement les deux moitiés l'une contre l'autre. Il y a même une espece qui fait encore plus. Elle abat entierement ses branches contre son tronc,

&

& alors un pedicule qui attache les branches au tronc, & qui étoit étendu, se plie tout à fait en dessous. C'est aussi par le moyen d'un pareil pedicule que les feuilles seules se plient. Il n'y a que les parties ébranlées par le mouvement de dehors qui se resserrent ainsi, les autres demeurent dans leur état. La Plante en se pliant n'est point dans une espece de défaillance, comme un Heliotrope qui panche sa tête du côté du Soleil, au contraire elle est dans une contraction fort sensible, & se roidit avec tant de force, que qui la voudroit remettre dans son premier état la romproit. La grande ressemblance de ces mouvemens à ceux d'un Animal, qui a fait donner à la sensitive le nom de *Mimosa* ou d'*Imitatrice*, autorise l'idée de M. *Parent*, qui croit que ce sont des mouvemens convulsifs. Il imagine qu'il y a dans cette Plante un fluide très-subtil, comme des Esprits, que l'impression reçûë de dehors agite plus qu'à l'ordinaire, & détermine à couler plus abondamment dans certains canaux. Cette explication semble n'approfondir pas beaucoup la matiere; mais quand il s'agit des mouvemens convulsifs des Animaux, qui nous devroient être plus connus, l'approfondit-on davantage ? Quoique nous ne sachions pas dans un certain détail & avec une certaine exactitude quelle est la méchanique des convulsions d'un Animal, c'est pourtant une sorte de connoissance que de savoir que les mouvemens de la Sensitive peuvent dépendre de la même méchanique que ces convulsions.

SUR

SUR LES PLANTES
DE LA MER.

VOici enfin la derniere partie de ce que M. le Comte *Marsigli* envoya à l'Academie sur l'Histoire de la Mer. L'étude de la Botanique terrestre, quoique si penible & si fatiguante, ainsi que nous l'avons representée dans l'Eloge de M. de *Tournefort* *, ne l'est pas encore tant que celle de la Botanique marine. Il faut aller à la Mer avec des Pêcheurs, car autrement tout ce qu'ils ne cherchent pas, & qui feroit quelquefois les délices d'un Botaniste, ils le rejettent aussi-tôt par une vieille habitude, quelque ordre qu'on leur eût donné au contraire. Ce qui est encore plus desagreable, c'est qu'on ne peut rien attendre que du hazard, on ne voit point où sont les Plantes, le filet les prend où il peut, & comme il peut.

Cependant malgré ces difficultés M. le Comte *Marsigli* a commencé une Botanique marine fort considerable, toute composée de Plantes qu'il a tirées lui-même. Il les divise en trois Classes, les molles, celles qui sont presque de bois, & les pierreuses. Cette division n'est guere differente de celle que feu M. de *Tournefort* avoit donnée dans les Memoires de 1700 †, quoique M. *Marsigli* ait dé-

* V. l'Hist. de 1708. p. 176. & suiv. † p. 36. & suiv.

déclaré qu'il ne prétendoit pas ſuivre un ordre rigoureux de Botanique.

Les molles ſont les Algues, les Fucus, les Eponges, les Mouſſes de mer, &c.

Les Plantes preſque de bois ſont les Lithophyton, ainſi nommés par les Anciens, parcequ'ils les ont crus des Plantes pierreuſes. Toute la compoſition de la Plante conſiſte en deux parties, l'écorce & la ſubſtance. L'écorce au ſortir de la mer eſt molle, & en ſe ſechant elle devient dure comme de la Craie, & ſe froiſſe aiſément entre les doigts; c'eſt-là apparemment ce qui a trompé les Anciens. La ſubſtance tient plus de la Corne que du Bois; ſi on la brûle, elle ſe met en une écume toute pareille à celle de la Corne, ou des Plumes, & qui a la même puanteur. Les rameaux des Lithophyton ſe plient comme de la Baleine, & font la même réſiſtance au Couteau.

Les Plantes Pierreuſes & qui meriteroient ſeules le nom de Lithophyton qu'elles n'ont pourtant pas, ſont les Coraux, & les Madrepores. M. *Marſigli* ne parle point de quelques autres, comme les Champignons pierreux, parceque la Mer de *Provence* ne lui en a pas fourni. Le Corail eſt aſſez connu par ſa figure exterieure, la Madrepore en differe en ce qu'elle n'a point d'écorce, qu'elle eſt ordinairement blanche, & percée de trous ſenſibles.

M. *Marſigli* n'ayant point de Livres, lorſqu'il fit ſes obſervations, ne pût aller chercher dans les Auteurs ſi les Plantes qu'il tiroit de la Mer avoient été décrites, quels noms on leur donnoit, & à quels genres elles
ſe

ſe rapportoient, car on ſait combien la dénomination & l'établiſſement du genre ſont importants en Botanique. Il fut donc obligé ou de les nommer comme les Pêcheurs, ou de les nommer quelquefois un peu au hazard, ou de les laiſſer ſans nom, & il ſe remit aux Botaniſtes de l'Academie du ſoin de chercher les noms veritables, & de reconnoître les caracteres generiques.

M. *Marchant* qui ſe chargea de ce travail ne pût y réüſſir comme il eût deſiré, car outre la difficulté de rapporter à certains genres des Plantes où ne ſe trouvent point les principales parties qui caracteriſent les autres, comme les racines, les fleurs, les fruits, il n'avoit que les deſcriptions de M. le Comte *Marſigli*, & non pas les Plantes mêmes, qui à peine auroient ſuffi après avoir été longtemps hors de la mer, parceque ſouvent elles changent beaucoup. Cependant il fit ce qu'il étoit poſſible de faire, il rangea pluſieurs Plantes de M *Marſigli* ſous leurs genres, & reconnut les noms qui leur avoient été déja donnés par les Auteurs. Nous ne nous arrêterons point à cette recherche, & nous tâcherons de tirer ſeulement de l'Ouvrage de M. *Marſigli* ce qu'il y a de plus philoſophique.

Les Algues ſont les ſeules Plantes de la mer qui ayent des racines, auſſi viennent-elles dans des fonds fangeux comme des Plantes terreſtres. Toutes les autres ſans exception viennent ſur des corps durs, tels que les Rochers, des Coquilles, des morceaux de fer, des conglutinations de terre, du bois, & même d'autres Plantes, &c. elles s'y attachent

chent étroitement par leur pied. Ni ce pied n'a des fibres propres à tirer de l'aliment, ni la plûpart des corps qui le portent ne peuvent être soupçonnés de lui en fournir.

M. *Marsigli* croit que toutes ces Plantes sans racines sont racines dans toute leur substance, c'est-à-dire qu'elles tirent l'aliment de tous côtés par une infinité de pores, & souvent de trous fort visibles dont elles sont pleines. Cette maniere de vegeter leur convient, puisqu'elles sont de toutes parts environnées de l'eau de la mer, qui leur porte leur nourriture, au lieu que les Plantes terrestres qui reçoivent la leur de la terre, & n'ont qu'une partie qui en soit embrassée, ont besoin que cette partie ait une disposition & des organes particuliers. Aussi toutes les Plantes marines, autant que M. le Comte *Marsigli* a pû reconnoître leur structure, & avec les yeux, & avec le Microscope, ne sont que des amas de glandules, ou de petits tuyaux, qui filtrent l'eau de la mer, & en séparent les sucs qui leur sont necessaires. Communément ce sont des sucs glutineux & laiteux.

Si une partie d'une Plante molle, ou d'un Lithophyton est dans de l'eau de mer, elle se conserve fraîche, tandis que l'autre partie qui est dehors se desseche. Il arrive le contraire aux Plantes terrestres qui se conservent fraîches en leur entier, pourvû qu'elles aient une seule partie qui trempe dans l'eau. Cela prouve que la communication qui est entre les parties des Plantes terrestres, n'est pas entre celles des Plantes marines, & que les parties de celles-ci se nourrissent indépendam-

ment

ment les unes des autres, & par une certaine *appofition* de matiere qui fe fait à chacune en particulier.

Après cette idée générale des Plantes de la Mer, nous raffemblerons leurs plus remarquables particularités, obfervées par M. *Marfigli*.

Il y a un Fucus dont le pied a trois lignes de diametre, lorfque la Plante eft fraîche, & qui devient mince comme un fil, quand il a perdu l'eau qu'il contenoit.

Il y en a un autre qui ferpente fur la roche fi irregulierement que l'on ne peut diftinguer fon veritable pied.

L'Orange de mer qui eft une efpece de Fucus porte ce nom à caufe de fa figure ronde. Elle n'a ni tige ni rameaux, & enfin ce n'eft qu'une Orange, qui peut avoir 4 pouces ½ de diametre, & dont la fubftance n'a que 1 ligne ½. Tout le refte n'eft qu'une grande concavité foûtenuë par une infinité de filamens qui la traverfent, & remplie d'eau de la mer qui a été filtrée par les glandules de la fubftance.

On trouve une Plante, qui n'eft qu'une Ecorce, attachée pour l'ordinaire à des Lithophyton qui ont perdu leur écorce naturelle, ou en tout ou en partie. Elle ne couvre jamais que la partie dépouillée. Quelquefois auffi elle va revêtir des pierres. Etant fraîche elle eft épaiffe comme le dos d'un Couteau, elle eft de fubftance de Champignon, & d'un rouge fort vif. Sa furface exterieure eft toute heriffée d'un grand nombre d'enflures, pleines d'un fuc gluant. Autour de ces enflures, on voit quantité de boutons ou Tubules

bules de couleur aurore, qui ſur un beau fonds rouge font un effet tres-agreable. La ſurface interieure eſt toute unie, & s'accommode à la forme du corps ſur lequel elle s'étend. Cette Plante eſt d'une nature beaucoup plus ſinguliere que les Plantes terreſtres qui ne vivent que ſur d'autres Plantes.

Pluſieurs eſpeces d'Eponges lorſqu'elles ſortent de la mer ont dans de certains petits trous un mouvement de Syſtole & de Diaſtole, qui dure juſqu'à ce que l'eau qu'elles renferment ſoit entierement conſumée.

Quelques Plantes de la claſſe des molles, étant ſeches, ſe froiſſent auſſi aiſément entre les doigts que les écorces des Lithophyton.

Il y a un Lithophyton qui porte un ſi grand nombre de rameaux capillaires, qu'ils ſemblent compoſer une eſpece de feuillage. Cependant comme tous ces rameaux ſont parfaitement de la même ſubſtance que le tronc, il eſt vrai ſans exception que tous les Lithophyton n'ont point de feuilles.

Une eſpece de Lithophyton eſt ſans écorce. Sa ſuperficie eſt enduite d'une glu ſemblable à un vernis, & qui eſt en plus grande abondance au pied. La plante eſt toute pleine d'Epines, elles paroiſſent mieux au ſommet des rameaux, où le vernis eſt en moindre quantité. On y voit auſſi, au ſortir de l'eau, certains petits globules d'une matiere glutineuſe, qui lorſqu'on remet la plante dans un vaſe plein d'eau de mer, s'étendent autour des rameaux, en faiſant une ſymmetrie agreable.

Le Corail croît ordinairement dans des Grottes dont la voûte concave eſt à peu près pa-

parallele à la ſuperficie de la Terre. Il faut que la mer y ſoit tranquille comme un Etang. Les Pêcheurs aſſurent, & M. *Marſigli* le croit juſqu'à preſent par ſes experiences, que le Corail ne vient jamais dans des Grottes ouvertes au Septentrion, elles doivent l'être au Midi, & tout au moins au Levant ou au Couchant. Il vient mieux & plus promptement à une moindre profondeur qu'à une plus grande. Il vegete à contre-ſens des Plantes terreſtres, & même des Plantes marines molles, & des Lithophyton, il eſt attaché par le pied au haut de la Grotte, & ſes branches ſont en embas.

Il eſt également dur, & également rouge dans l'eau & hors de l'eau. Seulement ſon écorce prend en ſe ſechant une couleur un peu plus livide, & les extremités de ſes branches ſont plus molles au ſortir de l'eau que le reſte de la plante, parcequ'elles ſont pleines d'un ſuc qui n'eſt pas encore conſolidé. Ces extremités en ſe ſechant à l'air deviennent friables.

Le pied par où le Corail s'attache à un corps ſolide en prend exactement la figure, & l'embraſſe en forme de plaque juſqu'à une certaine étenduë, ce qui prouve bien que la ſubſtance du Corail a été fluide dans ſa premiere formation. Et ce qui le prouve encore mieux, c'eſt que quelquefois cette même ſubſtance va tapiſſer le dedans d'un Coquillage, où elle n'a pû entrer qu'en forme de liqueur.

L'écorce s'étend également par tout, elle eſt moins compacte & moins dure que la ſubſtance propre qui eſt pierreuſe; on la dé-

tache aiſément, lorſque la Plante eſt fraîche. Elle eſt remplie & toute traverſée de petits tuyaux ronds, qui ont tous à leur ſommet un trou qu'on ne peut guere apercevoir ſans Microſcope. Ils ſont pleins d'un ſuc glutineux, qui dans la plante fraîche eſt de couleur de lait, & enſuite ſe condenſe, & prend une couleur de ſafran tirant ſur le rouge. La ſurface interieure de l'écorce eſt toute chagrinée par l'amas d'une infinité de glandules.

La ſuperficie du Corail dépouillé de ſon écorce eſt toute ſillonnée de canaux qui s'étendent depuis la plaque juſqu'aux extremités des branches. Il y a dans la ſubſtance propre de la Plante quantité de Cellules pleines d'un ſuc tout ſemblable à celui des Tubules de l'écorce, mais ces cellules ne ſont viſibles, & peut-être n'exiſtent que dans la circonference exterieure de la ſubſtance propre, tout le dedans paroît parfaitement ſolide & pierreux. Les cellules ſont auſſi plus grandes & en plus grand nombre vers les extremités des branches, que vers le pied.

Tout cela enſemble paroît prouver ſuffiſamment que toute la ſtructure organique du Corail par rapport à la vegetation conſiſte dans ſon écorce, & dans la ſuperficie de la ſubſtance coralline, que l'écorce filtre par ſes tubules un ſuc qui ſe répand entre elle & cette ſubſtance, en remplit les cellules, & coule le long des canaux juſqu'aux extremités des branches, & que ce ſuc s'étant petrifié tant dans les cellules qui environnent la ſubſtance coralline, que dans celles des extremités des branches dont la ſubſtance n'eſt

pas

pas encore formée, fait croître la Plante tant en grosseur qu'en hauteur. Nous sommes obligés de nous en tenir à cette explication, quoique très-superficielle & très-imparfaite en comparaison de celle où M. le Comte *Marsigli* est entré avec plaisir sur une vegetation si singuliere, qu'il a dévelopée le premier.

Le Corail est rongé par des Vers, dont M. *Marsigli* a donné la figure, & qu'il fera connoître encore mieux dans son Traité des Animaux de la Mer.

Les Madrepores viennent assez souvent dans les mêmes lieux que le Corail.

Elles changent la plûpart de couleur hors de la mer.

Elles sont communément peu pesantes, & faciles à froisser. Quelques-unes sont fragiles comme du verre, & d'autres le sont encore plus, de sorte qu'on ne peut presque y toucher.

Voilà ce qui regarde les particularités les plus curieuses des Plantes marines des trois Classes, mais nous n'avons point encore touché à leur multiplication, partie essentielle, & très-obscure de cette Botanique. Pour voir les fleurs ou les fruits ou les graines d'une Plante marine, il faut être doublement favorisé par le hazard, la tirer de la mer par filet qui ne choisit rien, & la tirer justement dans le temps qu'elle est en fleur ou en graine. Et quoique l'on ait toûjours les Plantes terrestres sous ses yeux & en sa disposition, il y en a encore, comme les Champignons & les Truffes, qui nous cachent depuis un fort long-temps la maniere dont elles se multiplient.

 Ce-

Cependant comme l'assiduité de l'observation force enfin le hazard à être favorable, M. le Comte *Marsigli* fit en 1707 une découverte qui sera à jamais celebre dans la Botanique Marine. C'est celle des fleurs du Corail. Elles sont blanches, ayant chacune leur pedicule, & huit feuilles, le tout ensemble de la grandeur & de la figure d'un clou de Girofle. Elles sont en très-grand nombre sur toute la Plante. Elles sortent de tous les Tubules de l'Ecorce, & y rentrent dans l'instant qu'on retire la Plante de l'eau. Si on l'y remet, elle refleurit toute entiere en moins d'une heure, & quelquefois elle se conserve pendant 12 jours en état de faire alternativement ce manege autant que l'on veut, après quoi les fleurs prennent la forme d'une petite boule jaune, & tombent au fond de l'eau. La description de ces phenomenes a été faite plus en détail dans le Supplément du Journal des Savans de 1707. On a crû long-temps que le Corail n'étoit qu'une pierre, & qu'auroit-on dit de voir cette pierre toute couverte de fleurs? Pour nous-mêmes, qui savons que c'est une Plante, ces fleurs-là ne laissent pas d'être quelque chose de fort surprenant. Le Corail en eût bien plûtôt dû manquer qu'un grand nombre de Plantes terrestres.

Selon l'analogie des autres Plantes, il sembleroit que les petites boules tombées au fond de l'eau devroient contenir la semence du Corail. Cependant M. *Marsigli* en les ouvrant n'y trouva, ni graine, ni rien qui en approchât, mais seulement un suc gluant semblable à celui de l'Ecorce. D'ailleurs puis-

puiſque le Corail eſt attaché au haut d'une Grotte où il vegete de haut en bas, & que les boules tombent par leur poids au fond de l'eau, il ſeroit difficile qu'elles reportaſſent les graines en haut ſi elles les contenoient, à moins cependant qu'elles ne vinſſent à diminuer de peſanteur, ou qu'elles ne s'ouvriſſent, & ne laiſſaſſent remonter les graines plus legeres qu'elles. Mais il vaut mieux ne point deviner, & attendre du temps qu'il éclairciſſe le myſtere de la ſemence du Corail, qui ne ſera pas plus étonnant que celui des fleurs.

M. *Marſigli* a trouvé que les petits globules du Lithophyton épineux & ſans écorce dont nous avons parlé, s'allongeoient, pouſſoient deux filamens à leur ſommet, & enfin devenoient des eſpeces de fleurs, lorſqu'on tenoit la Plante dans de l'eau de mer, reprenoient leur premiere forme quand on l'en retiroit, & redevenoient fleurs ſi on l'y remettoit, parfaitement ſemblables à cet égard aux fleurs du Corail. Cela peut durer deux jours. Ces fleurs, non plus que celles du Corail, ne renferment aucune ſemence ſolide.

La Claſſe des Plantes molles a un peu mieux ſatisfait la curioſité de M. le Comte *Marſigli*. Il en a trouvé une ſans feuilles, qui avoit de très-belles fleurs à ſix feuilles blanches, avec ſix filamens blancs, & d'aſſez gros fruits ronds, qui renfermoient chacun ſix petits grains de ſemence jaunes, & d'un goût fort piquant. Il a vû une autre Plante qui avoit des gouſſes vuides, & dont apparemment la graine étoit ſortie. D'un

autre côté, il lui est venu des fruits détachés de leurs Plantes, un fruit en forme de Figue, où sont renfermées des graines, & une espece de petite Olive qu'on dit être le fruit de l'Algue, & qui a un noyau solide. Il a eu aussi quelques Plantes molles, & particulierement cette *Plante-écorce* dont on a parlé, qui ne lui ont point montré de graine, mais en recompense des fleurs qu'il a vû disparoître & reparoître dans les mêmes circonstances que celles du Corail, & du Lithophyton épineux.

Ainsi on connoît des fleurs à toutes les trois Classes, & des semences à celle des Plantes molles; commencemens déja très-considerables d'une Botanique marine, que l'on doit à M. le Comte *Marsigli*, à qui apparemment on devra encore de plus grands progrès de cette partie si inconnuë de la Physique.



DIVERSES OBSERVATIONS
BOTANIQUES.

I.

APrès le grand & cruel Hiver de 1709, plusieurs Laboureurs semerent du Bled en Avril à la place de celui qui étoit mort. Comme ils virent qu'il ne produisoit point d'Epics, la plûpart d'entre eux en couperent la fane & l'herbe vers la S. Jean, & retournerent leurs terres; quelques-uns après avoir cou-

coupé l'herbe du Bled laisserent quelque petite partie de leur terre sans la retourner, & d'autres ne toucherent point du tout à une partie de leur Bled.

Le Bled dont on avoit coupé l'herbe, & dont la terre n'avoit point été retournée, poussa en 1710, & fut de 10 ou 12 jours plus avancé que les autres Bleds de 1710 semés vers la S. Martin 1709. Il fut moins fort, & porta moins de grain, mais un grain plus gros, & meilleur pour les Boulangers.

Le Bled anquel on n'avoit point touché fut fort beau en 1710, & même quelquefois plus beau que celui qui avoit été semé en Autonne 1709. L'un & l'autre de ces deux cas a été verifié en differens lieux.

On voit par-là que du moins en ces païs-ci il faut que le Bled passe un Hiver en terre.

II.

A cette occasion, M. *Homberg* a dit que si on étête des Plantes *annuelles* avant qu'elles portent leur graine, elles la portent l'année suivante, & que c'est un moyen sûr de les rendre *vivaces*.

III.

M. *Carré* écrivit d'une Campagne où il étoit qu'il y avoit vû du Bled, qu'on appelle *Bled de Mars*, parce-qu'on ne le seme qu'en ce mois-là, & dont par cette raison les Laboureurs devroient avoir provision en cas d'un malheur comme celui de l'Hiver de 1709. Il faut être connoisseur pour le distinguer d'avec le Froment. L'Epi a des barbes, & est assez court. Il est neanmoins fort different d'un autre Bled, qu'on nomme

Bled barbu. Il résiste mieux que le Froment à l'effort des vents, comme M. *Carré* attestoit l'avoir vû lui-même. Il fait d'aussi bon pain que le Froment. Cette espece est dispensée de passer un Hiver en terre.

IV.

M. *Jaugeon* a dit qu'il a vû deux pieds d'Arbre assez éloignés l'un de l'autre par le bas, qui se sont ensuite unis en un seul tronc, jusqu'à n'avoir qu'une écorce commune.

MOnsieur *Chomel* a donné la Description du *Tribuloïdes vulgare aquis innascens. Inst. rei Herb.* 655.

M. *Marchant* celles de la Filipendule, du *Flos Solis Indicus Trachelii folio radice repente*, & du *Narcissus silvestris multiplex calice carens*.

UNe maladie de M. *Reneaume* l'ayant empêché d'imprimer un Memoire sur la Noix de Galle, nouveau Febrifuge qu'il a trouvé, nous renvoyons entierement cette matiere à l'année prochaine.

ARITH-



ARITHMETIQUE.

SUR LES QUARRE'S MAGIQUES.

* NOUS avons déja fait une petite hiſtoire des Quarrés Magiques †. Nous la ſuppoſons ici, & tout ce que nous avons expliqué en même temps ſur ce ſujet. Ils ont ſuivi la deſtinée de toutes les autres productions de l'Eſprit humain. Leurs commencemens ont été foibles, & ils ont toûjours reçû de nouveaux accroiſſemens de la main des derniers Mathematiciens qui y ont travaillé. Juſqu'ici M. *de la Hire* étoit le dernier de tous, maintenant c'eſt M. *Sauveur*, & même il y a lieu de croire qu'il le ſera toûjours, ou du moins long-temps, car il paroît avoir épuiſé pour la plus grande partie une matiere, qui d'ailleurs n'intereſſe pas beaucoup, & ce qui pourroit encore reſter à découvrir coûteroit plus qu'il ne vaut

Le principal artifice, celui qui influë ſur toute la Magie, & en contient tous les fondemens, conſiſte à réſoudre, comme nous

E 5 l'avons

* V. les M. p. 124.
† V. l'Hiſt. de 1705. p 87 & ſuiv.

l'avons dit, le Quarré qu'on veut construire en deux Quarrés primitifs. La premiere idée de cette décomposition est dûë à M. *Poignard.* Il est clair que si l'on veut remplir magiquement les 49 Cellules, par exemple, du Quarré de 7, il sera sans comparaison plus facile de les remplir d'abord des 7 nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de maniere qu'aucun ne soit repeté dans une même bande, & ensuite des 7 autres, 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42 avec la même condition, que s'il avoit falu embrasser à la fois tous ces 49 nombres, & les arranger magiquement. Non-seulement le travail de l'operation est fort diminué par cette methode, mais on voit beaucoup plus clair à ce qu'on fait, & les démonstrations sautent aux yeux. Aussi M. *de la Hire* & M. *Sauveur* ont-ils fait regner cette pratique dans toutes leurs differentes constructions. M. *Sauveur* appelle les petits nombres 1, 2 &c. 2ds *nombres*, & les grands 0, 7 &c. 1ers *nombres.* Chaque cellule est remplie d'un 1er nombre ajoûté à un 2d.

Il faut pour le Quarré magique de 7, 1°. que chacune des 49 cellules contienne un nombre de la progression depuis 1 jusqu'à 49 different de ceux que contiennent toutes les autres, 2°. que toutes les bandes horizontales, verticales, & diagonales de cellules fassent la même somme.

On satisfait à la premiere condition en ajoûtant successivement chacun des 1ers nombres à chacun des 2ds, & en mettant chaque somme dans une cellule differente. Par-là on a chaque nombre depuis 1 jusqu'à 49 logé à part. Mais il faut bien remarquer pourquoi

par

par ce moyen on a ces 49 differens nombres. Ce n'est pas, comme on le pourroit croire d'abord, parceque les 7 2ds nombres sont en progression arithmetique, ni parceque les 7 1ers y sont aussi, & de plus parceque ces 1ers sont multiples de 7, & ont 7 pour leur difference; c'est précisément parceque 7 difference des 1ers nombres est égale, ou plus précisément encore n'est pas plus petite que 7 le plus grand des 2ds nombres, car elle peut être plus grande autant que l'on voudra. Et il n'est pas besoin non plus que la difference des 1ers nombres soit toûjours la même, ils peuvent avoir des differences inégales, pourvû seulement que la plus petite de ces differences ne soit pas plus petite que le plus grand des 2ds nombres. Ainsi en prenant d'un côté pour 2ds nombres, 1, 3, 4, 7, 8, 12, 13, & de l'autre pour 1ers, 5, 18, 32, 52, 77, 104, 119, ou 5, 19, 33, 53, 78, 105, 120, ou une infinité d'autres, on aura par l'addition des 1ers & 2ds nombres 49 nombres differens.

On satisfait à la seconde condition du Quarré magique par rapport aux bandes horizontales & verticales, lorsqu'on fait ensorte que chacune de ces bandes contienne tous les 7 nombres tant 1ers que 2ds, car delà s'ensuit necessairement l'égalité perpetuelle de leurs sommes, & il n'est nullement besoin que les uns ni les autres de ces nombres soient en progression arithmetique, il suffit qu'ils soient les mêmes dans toutes les bandes. On satisfait de la même maniere à l'égalité des deux bandes Diagonales, mais comme il peut arriver que plusieurs nombres y soient repetés, il faut alors que la somme de

ceux qui sont repetés soit égale à la somme de ceux dont ils occupent la place. Que s'il n'y a qu'un seul nombre dans une Diagonale, il est necessaire que ce soit un nombre moyen qui multiplié par le nombre des termes fasse un produit égal à la somme de tous les termes, car ce nombre repeté dans toute une Diagonale fera une somme égale à celle de toutes les autres cellules, puisqu'il ne sera repeté qu'autant qu'il y aura de cellules dans toutes les autres bandes, ici, par exemple, 7 fois. Cette proprieté du nombre moyen, qui se trouve dans tout moyen arithmetique, semble exiger que les nombres tant 1rs que 2ds soient en progression arithmetique; cependant elle ne l'exige point. Par exemple, 1, 4, 6, 7, 12, ne sont ni en progression ni en proportion arithmetique, & 6 multiplié par le nombre des termes qui est 5, ne laisse pas d'être égal à la somme de tous les termes qui est 30. On est donc dispensé d'avoir des nombres 1ers ni 2ds en proportion arithmetique, il suffit que le nombre moyen ait la proprieté que nous avons dite. Il n'est pas même necessaire qu'il soit exactement moyen, c'est-à-dire placé précisément au milieu des autres, car ce n'est pas-là ce qui le rend propre à être repeté dans toute une Diagonale; ainsi dans ces nombres 1, 4, 6, 7, 17, 7 qui n'est pas au milieu a cependant la proprieté essentielle dont il s'agit. Cette même proprieté peut s'exprimer plus commodément & pour la Theorie & pour le calcul. Les differences de 7 aux nombres inferieurs 1, 4, 6, font 6, 3, 1, on les appelle *negatives*. Sa difference au seul nombre superieur 17 est

10,

10, & on l'appelle *positive*. La somme des differences negatives du nombre moyen doit être égale à celle des positives, & ici elle est égale à la seule positive, parcequ'elle est seule.

De tout cela il suit qu'au lieu qu'on ne prenoit pour la construction des Quarrés magiques que des nombres en progression arithmetique, & même naturelle, le choix est beaucoup plus libre qu'on ne pensoit. C'est cette liberté reconnuë par M. *Sauveur* dans toute son étenduë, & avec les seules restrictions absolument necessaires, qui lui a fait naître la pensée de construire les Quarrés magiques par lettres, c'est-à-dire d'une maniere beaucoup plus générale que l'on n'a jamais fait, & aussi générale qu'il soit possible, car dès que des nombres ont quelque chose de général & d'indéterminé, les lettres sont propres à exprimer toute leur généralité & leur indétermination.

Il a donc des 1eres & 2des lettres qui representent les 1ers & les 2ds nombres. Il est indispensable que la plus petite difference des 1eres lettres soit du moins égale à la plus grande des 2des lettres, & de plus que tant dans les 1eres lettres que dans les 2des il y en ait une moyenne telle que la somme de ses differences negatives soit égale à celle des positives. Après cela, il construit un Quarré qui est le modele & le Type d'une infinité de Quarrés, parce-qu'on n'a qu'à substituer aux lettres tels nombres que l'on veut dans les deux conditions prescrites.

Cette construction des Quarrés par lettres demande toûjours les Regles communes, ne-

 ces-

cessaires pour rendre égales les sommes de toutes les bandes, mais ces Regles qui n'étoient le plus souvent que particulieres, M. *Sauveur* les rend générales par une plus grande facilité d'apercevoir le général dans des lettres. Differentes Regles qui vont au même effet produisent differentes Methodes pour une même construction, ou plutôt differentes especes de constructions pour une même espece de Quarré. J'appelle *especes* de Quarrés, les Quarrés pairs ou impairs par opposition les uns aux autres. Il seroit à souhaiter qu'on pût démontrer que pour une espece de Quarré, il n'y a qu'un certain nombre de Methodes, ou d'especes de construction.

Tout ce qui a été dit jusqu'ici regarde principalement les Quarrés impairs. Pour les pairs, qui ont toûjours été traités à part, à cause qu'ils sont beaucoup plus difficiles, & qui par cette même raison n'ont presque été qu'effleurés, M. *Sauveur* ne les peut construire qu'en ajoûtant à ses lettres tant 1eres que 2des la condition qu'elles soient *analogues*, c'est-à-dire qu'étant prises deux à deux leurs sommes soient toûjours égales. Ainsi dans 1, 5, 6, 10, 11, 15, 1 & 15, 5 & 11, &c. sont analogues. Ces nombres ou lettres sont donc du moins en proportion arithmetique.

La methode des Analogues a cela d'heureux qu'elle comprend aussi les Quarrés impairs. Il ne faut que joindre aux 1eres & 2des lettres analogues destinées à un quarré pair, une 1ere & 2de lettre moyenne, avec la condition que sa nature de lettre moyenne demande. Jusqu'ici on n'avoit point réduit

les

les deux eſpeces de Quarrés ſous une methode commune.

Par la conſtruction par *analogie*, on voit d'abord que ſi l'on a mis dans une cellule une lettre quelconque, il faut mettre dans une autre cellule de la même bande ſon analogue, & toûjours ainſi de ſuite. Si le quarré eſt impair, on peut mettre dans les deux Diagonales au lieu des deux lettres analogues deux lettres moyennes, qui feront toûjours la même ſomme. Dans ces Quarrés, les Diagonales ne doivent jamais avoir des lettres moyennes qu'en nombre impair, afin que les cellules reſtantes qui ſeront en nombre pair puiſſent être remplis par des analogues qui ne vont que deux à deux.

Chaque lettre devant être autant de fois repetée qu'il y a de cellules dans une bande, il s'enſuit qu'une lettre avec ſon analogue peut remplir deux bandes entieres paralleles, & alors le Quarré eſt par bandes *continuës*; il eſt par bandes *interrompuës*, ſi la même lettre avec ſon analogue eſt répanduë dans plus de deux bandes paralleles. Les bandes continuës peuvent de plus être *correſpondantes*, c'eſt-à-dire également éloignées des extremités du Quarré, ou non correſpondantes, ou enfin mixtes. M. *Sauveur* a épuiſé toutes ces differentes conſtructions même dans les Quarrés qu'il appelle *impairement pairs*, c'eſt-à-dire dont la racine comme 6 ou 10 a deux moitiés impaires. On n'en avoit donné juſqu'à preſent que des cas particuliers.

Si dans une bande quelconque il y a des lettres ſans leurs analogues, M. *Sauveur* met à la place de ces analogues qui manquent,

quent, des *réciproques* qui font la même somme.

Si dans un Quarré impair la somme des 1eres lettres est plus grande ou plus petite que le produit de la moyenne par le nombre des termes, ce qui est contre la disposition ordinaire, il faut que la somme des 2des lettres soit de la même quantité plus grande ou plus petite que ce même produit de sa moyenne, & c'est-là ce que M. *Sauveur* appelle *Quarrés par excedants & par défaillants.*

Il paroît que ces 3 Methodes, *par analogie, par réciprocation, par excedants & défaillants*, comprennent tout ce qu'on peut jamais observer pour entretenir l'égalité perpetuelle des sommes.

On peut juger que les *Enceintes*, dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1705, n'échapent pas à une Theorie si générale. M. *Sauveur* y ajoûte même les *Chassis* & les *Croix*, que l'on ne connoissoit point encore. Les Quarrés *geometriques* entreront aussi dans cette même Theorie. Il n'y a d'autre changement à faire dans les operations que celui que la difference de l'arithmetique au geometrique emporte necessairement.

Il reste en cette matiere une curiosité; c'est de savoir en combien de façons peut varier un Quarré magique. Quand on en a fait un en 1eres & 2des lettres, & qu'on a fait choix de certains nombres qu'on leur substituë, il est indifferent à quelle lettre on substituë un certain nombre, si ce n'est qu'il n'y ait quelque assujettissement indispensable, comme dans un Quarré impair de substituer le nombre moyen à la lettre moyenne. On

trouve

trouve aiſément par les regles des combinaiſons combien il y a de ſubſtitutions libres, & ce ſont autant de variations dont eſt ſuſceptible un Quarré magique composé des mêmes nombres. M. *Sauveur* appelle cela *variation de nombres*. De plus un même Quarré peut être conſtruit par differentes methodes, dont chacune a une certaine quantité de variations de nombres. La ſomme de toutes les *variations de nombres de toutes les methodes* eſt le nombre de toutes les variations que peut recevoir un Quarré magique déterminé, pourvû cependant qu'il n'y ait pas certaines conſtructions d'une methode qui retombent dans celles d'une autre, ce qu'on ne peut pas trop garantir.

A cela près, il ſeroit à ſouhaiter qu'on eût des formules générales & algebriques pour les variations des Quarrés, & on en auroit 1°. ſi dans chaque Quarré d'une racine differente on pouvoit exprimer le rapport des variations de nombres à la racine, 2°. ſi on étoit ſûr d'avoir toutes les methodes poſſibles pour la conſtruction. Mais ni on ne peut dans chaque methode exprimer toûjours le rapport des variations de nombres à la racine, ni on n'eſt abſolument ſûr d'avoir toutes les methodes. On voit bien qu'il ſeroit très-difficile d'en imaginer d'autres que celles de M. *Sauveur*, & que cette difficulté approche fort de l'impoſſibilité, mais enfin ce n'eſt pas-là une certitude de démonſtration.

Cependant M. *Sauveur* a fait ſur cela ce qui ſe pouvoit faire, & a donné les formules algebriques qui pouvoient être déterminées.

nées. On voit par-là, du moins en général, que toutes les variations possibles des Quarrés un peu grands, comme du Quarré de 7, doivent monter à des nombres prodigieux, & que celui de 406425600 constructions que nous avions marqué pour ce Quarré dans l'Hist. de 1705, est bien éloigné d'être exaggeré.

Une utilité nouvelle des lettres de M. *Sauveur*, & même agréable, c'est qu'un Quarré en nombres étant donné tout construit, il n'y a qu'à changer ces nombres en lettres 1eres & 2des selon les principes qui ont été établis, & alors on voit par la disposition & l'arrangement des lettres quelle methode a été employée dans la construction de ce Quarré. L'artifice qui se cachoit dans les nombres se découvre necessairement par les lettres, qui contiennent tout le fin & tout le mystere. On le démêle plus facilement, quand les nombres dont on a formé le Quarré sont en progression arithmetique. Ils laissent des traces plus visibles, & il est aisé d'en apercevoir la raison. Ce sont eux aussi qu'il est le plus naturel d'employer, & les seuls qu'on ait employés jusqu'ici. Par-là M. *Sauveur* a eu le plaisir de découvrir à laquelle de ses methodes se rapportoient les Quarrés construits par les Auteurs qui l'ont précedé.

Enfin à tout cela il ajoûte les *Cubes magiques*, espece d'enchantement toute nouvelle. 27 est un Cube, qui peut être conçû comme composé de 27 petites cellules cubiques, dont chacune a 3 pour racine, & on peut concevoir que chacune de ces cellules porte ou

ou renferme un nombre different de ceux de toutes les autres. Si les nombres de toutes les bandes de cellules soit horizontales soit verticales, & de plus des 6 bandes de cellules qui sont dans les 6 Diagonales du Cube, font toûjours une même somme, ou un même produit, le Cube sera magique, soit arithmetique, soit geometrique.

Il faut trois lettres ou nombres pour un Cube, au lieu qu'il n'en falloit que deux pour un Quarré. Mais nous ne pousserons pas plus loin cette speculation, que M. *Sauveur* ne regarde lui-même que comme une simple recreation mathematique. C'est dommage qu'il n'y ait que trois dimensions dans la nature, on voudroit aussi disposer toutes les autres magiquement.



ALGEBRE.

SUR LA CONSTRUCTION DES EGALITE'S.

* LA Regle de M. *Descartes* pour la construction des Egalités ou Equations déterminées a été expliquée dans les Hist. de 1705 † de 1707 ‡, & les objections de M. *Rolle* contre cette Regle dans les Hist. de 1708

* V. les M. p. 9. † p. 136. & suiv. ‡ p. 90. & suiv.

1708 * & de 1709 †. Elles ont réveillé les idées de M. *de la Hire* sur cette matiere qu'il avoit traitée dans un petit Livre imprimé en 1678, où il suivoit les idées de M. *Descartes*, & de M. *Sluze*, qui avoit bâti sur celles de *Descartes*. Il n'a pû se rendre aux objections de M. *Rolle*, ni se persuader qu'il y eût des erreurs dans des operations qu'il croit fondées sur des démonstrations geometriques. Mais il est entré dans un examen plus ample, qui lui a valu quantité de vûës, nouvelles non-seulement par rapport à celles qu'il avoit déja données au Public, mais encore par rapport à tout ce que l'on savoit jusqu'ici sur ce sujet.

1°. M. *de la Hire* prétend que ce qu'on appelle la Regle de *Descartes* n'est point proprement une Regle que ce grand Auteur ait proposée dans les formes. Ce sont plutôt quelques exemples de construction qui lui suffisoient alors, mais dont il est vrai qu'on peut tirer, & dont on a tiré effectivement une bonne Regle. L'Inventeur n'a point touché aux difficultés qu'on pouvoit trouver dans l'application, & il y a beaucoup d'apparence qu'il a voulu se conserver une partie de son secret.

2°. Il a suffisamment insinué lui-même que dans ces Constructions le choix du premier Lieu n'étoit pas entierement arbitraire, & cependant de fort habiles Geometres semblent avoir crû depuis qu'il l'étoit. On est obligé d'accorder à M. *Rolle* qu'il ne l'est pas, & il aura toûjours empêché le progrès de cette erreur dans la Geometrie, mais la verita-

* p. 86. & suiv. † p. 66. & suiv.

table idée de *Descartes* ne laisse pas de demeurer en son entier.

3°. La Regle telle qu'on la prend d'ordinaire peut jetter dans des inconveniens, dans des difficultés, dans des impossibilités même, mais tout cela n'est qu'apparent. Il faut savoir ne pas prendre pour un écueil ce qui n'en est pas un, ou si c'en est un, il faut savoir l'éviter avec adresse. Voilà surquoi roulent les principales découvertes de M. *de la Hire*, & nous allons donner ici les exemples les plus instructifs de ses nouveaux Préceptes.

Il propose quelques cas où en operant selon la Regle, on peut pour construire une Equation déterminée, ou en trouver les Racines, se contenter d'une Courbe, & d'une ligne droite, qui ne se coupant qu'en deux points ne donneront que deux Racines de l'Equation déterminée, qui cependant en a quatre. La Courbe & la ligne droite ont été bien prises, il est certain même qu'elles doivent donner la construction ; où est donc l'erreur? C'est qu'au lieu d'une simple ligne droite, il falloit prendre deux Hyperboles opposées devenuës lignes droites.

Telle est la nature de l'Hyperbole, ou des Hyperboles opposées, que quand le *premier* Axe, c'est-à-dire, celui qui se termine aux deux sommets, est plus petit par rapport à son *conjugué* qu'on appelle le *second*, il s'ensuit que l'angle des Asymptotes entre elles en est plus grand, que celui qu'elles font avec le second Axe est plus petit, & qu'elles s'en approchent davantage, & que les Ordonnées de differentes Hyperboles correspondantes à des Abscisses égales, sont plus grandes; de sor-

forte que si le second Axe devient infini, le premier qui est déterminé étant toûjours le même, les Asymptotes se confondent avec le second Axe, & les Hyperboles dont les Ordonnées sont devenuës infinies, ne sont plus que deux lignes droites infinies, paralleles aux Asymptotes & au second Axe, & rencontrées perpendiculairement par le premier, qui mesure leur distance. C'étoient ces deux droites qu'il falloit prendre au lieu d'une seule, elles coupent la Courbe en quatre points. Et ce qui marque la necessité de les prendre, c'est que le Lieu à la ligne droite que l'on a est un Quarré inconnu égal à un Quarré connu. Or un Quarré a toûjours deux Racines égales, affectées des deux Signes contraires.

Voici quelque chose de plus remarquable. M. *Rolle* avoit fait voir que quoique les Racines égales ne se doivent trouver selon la Regle de *Descartes* qu'aux points d'attouchement des Courbes, les trois racines égales d'une Equation construite par une Parabole, & par une Hyperbole se trouvoient à un point d'intersection. Certainement la difficulté étoit des plus considerables, tout paroissoit renversé. Mais M. *de la Hire* dissipe cette apparence de défectuosité dans la Regle, en demontrant que dans le point où les deux Courbes se coupent elles ont une Tangente commune. Or il est constant en Geometrie qu'un point d'attouchement en vaut deux d'intersection ; ces deux supposés, & celui d'intersection veritable, c'en sont trois, & ces trois ne doivent donner, & ne donnent effectivement qu'une seule Ordonnée

née ou Racine, équivalente à trois égales.

Cependant cette réponse elle-même n'est pas sans de grandes difficultés. Car quoique M. *de la Hire* démontre que les deux Courbes ont une Tangente commune à leur intersection, il est bien sûr qu'elles ne se touchent pas, puisqu'au contraire elles se coupent, & pourquoi, de quel droit, suppose-t-on qu'un point qui n'est pas d'attouchement vaut deux points? Il n'en doit valoir qu'un, puisqu'il n'est que point d'intersection. Il faudroit pour en valoir trois qu'il fût en même temps point d'attouchement & d'intersection, ce qu'il n'est pas & ne peut être. D'ailleurs comment est-il possible que deux Courbes ayent une Tangente commune sans se toucher, & qu'elles se coupent ayant une Tangente commune? On voit toûjours que quand deux Courbes se touchent, elles ont la même Tangente, & que si elles se coupent leurs Tangentes se coupent aussi, & par conséquent sont differentes, & cela paroît absolument necessaire. Il reste donc beaucoup d'éclaircissemens à desirer, même dans une chose démontrée. Nous allons tâcher de les donner selon la Geometrie des Infiniment petits, qui seule peut aller à ces sortes de finesses.

Une Courbe quelconque étant conçûë comme un Polygone d'une infinité de côtés infiniment petits, chaque côté fait avec celui qui le précede ou le suit un angle obtus, non pas de 180 degrés, car alors les deux côtés seroient posés bout à bout en ligne droite, ce qui n'arrive que dans des points d'*Inflexion*,

flexion, mais un angle infiniment peu different de 180, de sorte que son complément à 180 est un angle aigu infiniment petit. Les Anciens qui ont appellé *angle de contingence* celui qu'une Tangente de Cercle fait avec sa circonference, ont entendu par-là cet angle aigu, qu'ils ne connoissoient pourtant pas aussi distinctement qu'ils eussent fait par nôtre Geometrie moderne, & quand ils ont démontré qu'il ne pouvoit passer par le point d'attouchement aucune ligne droite entre la Tangente d'un Cercle, & sa circonference, ils ont senti & reconnu l'infinie petitesse de l'angle de contingence, puisqu'ils le trouvoient indivisible. Cependant cet angle infiniment petit, & par conséquent indivisible en parties finies, est divisible en parties du même genre de petitesse que lui, il peut être 2 fois, 3 fois, & à l'infini plus petit, & delà vient que ne pouvant être divisé par aucune ligne droite, il le peut être par une infinité de circonferences toûjours plus grandes, qui le rendront toûjours plus petit. Un côté du Polygone infini peut donc faire avec celui qui le précede un angle de contingence different de celui qu'il fait avec le côté qui le suit, & même cela est ainsi dans toutes les Courbes, horsmis dans le Cercle.

Il faut encore supposer deux choses, 1°. que les Tangentes des Courbes ne sont que leurs côtés infiniment petits prolongés, 2°. que ces côtés peuvent être eux-mêmes conçûs comme composés d'infiniment petits *du 2d genre*.

Quand deux Courbes se rencontrent de quelque maniere que ce soit, elles ont quel-

que

que partie commune. Si cette partie n'est que l'infiniment petit d'un de leurs côtés infiniment petits, & c'est tout ce qu'il peut y avoir de moins, les deux côtés qui n'ont rien de commun que cet infiniment petit du 2d genre, se coupent donc en ce point, & par conséquent les Tangentes & les Courbes s'y coupent aussi. Si la partie commune est un côté infiniment petit du 1er genre, il faut voir comment il est posé dans les deux differentes Courbes ausquelles il apartient, ici, par exemple, dans la Parabole, & dans l'Hyperbole. S'il y est posé de maniere qu'il fasse dans la Parabole avec les deux côtés dont l'un le précede, & l'autre le suit deux angles de contingence plus grands que ceux qu'il fait dans l'Hyperbole avec les deux côtés voisins, il est évident que la Parabole & avant que d'avoir le côté commun, & après, sera au dedans de l'Hyperbole, c'est-à-dire, que ces deux Courbes se toucheront. Ce seroit la même chose renversée si les deux angles de contingence du côté commun étoient plus petits dans la Parabole que dans l'Hyperbole. Mais si le côté commun fait avec le côté qui le précede dans la Parabole un plus petit angle de contingence que celui qu'il fait avec le côté qui le précede dans l'Hyperbole, & si en même temps il fait avec le côté qui le suit dans la Parabole un plus grand angle que celui qu'il fait avec le côté qui le suit dans l'Hyperbole, ou si c'est le contraire, la Parabole ayant été au dehors de l'Hyperbole viendra à être au dedans, ou au contraire, & par conséquent elles se couperont. Si à cette explication des interfections & des at-

touchements, on veut ajoûter celle des *baisements*, qui est dans l'Hist. de 1706 *, on aura toutes les manieres dont les Courbes peuvent se rencontrer.

Il est donc visible qu'un côté infiniment petit du 1er genre commun à deux Courbes ne les détermine pas necessairement à se toucher, mais seulement à avoir une même Tangente, soit qu'elles se touchent ou non. D'une autre part, tout point d'attouchement vaut deux points, parceque si l'on imagine qu'une Corde qui coupe une Courbe, un Cercle, par exemple, en deux points, devienne toûjours plus petite, elle coupera toûjours la Courbe en deux points quelque petite qu'elle soit, & par consequent lors même qu'elle le sera infiniment, & alors elle sera un côté infiniment petit de la Courbe, & une Tangente, si on la prolonge. Par-là, on conçoit qu'un point d'attouchement en vaut deux d'interfection, puisque ce sont deux points d'interfection auparavant éloignés, & qui se sont infiniment rapprochés. Mais cette valeur d'un seul point vient précisément, non de ce qu'il est point d'attouchement, mais de ce qu'il est formé de deux points infiniment rapprochés, & par consequent il aura toûjours cette même valeur si sans être point d'attouchement il peut être formé de la même maniere. Or tout côté infiniment petit du 1er genre peut être conçû comme ayant été Corde qui a coupé la Courbe en deux points, donc tout côté infiniment petit du 1er genre commun à deux Courbes vaut deux points, soit qu'à ce côté-là

* p. 114. & 115.

là il se fasse un attouchement des deux Courbes, ou une intersection, ce qui lui est indifferent.

S'il s'y fait un attouchement, les deux Courbes n'ont plus absolument de partie commune, & ce point n'en peut valoir que deux. Mais s'il se fait une intersection, elle ne se peut faire que les deux Courbes n'ayent encore quelque partie commune que l'intersection demande necessairement, & qui n'est point le côté infiniment petit du 1er genre, puisqu'il est indifferent à l'attouchement & à l'intersection. Cette nouvelle partie commune sera un infiniment petit du 2d genre, qui donnera un troisiéme point. Ainsi voilà les trois points trouvés assez distincts les uns des autres, & toutes les difficultés éclaircies.

On voit même pourquoi le cas proposé est rare, & pourquoi il a surpris quand il s'est presenté. Ce sont les angles de contingence plus grands ou plus petits, qui rendent la courbure des Courbes plus grande ou plus petite, & ils varient continuellement dans toutes, horsmis dans le Cercle seul. Deux Courbes ayant dans une construction une origine commune, ou du moins deux origines peu éloignées, il est assez naturel que dans leurs parties correspondantes la courbure de l'une soit toûjours ou plus grande ou plus petite que celle de l'autre, & que par consequent si elles se rencontrent, elles se coupent ou se touchent simplement. Il faut pour le cas proposé qu'elles se rencontrent justement au point où la courbure de l'une ayant été plus grande ou plus petite que celle de

l'autre vient à être le contraire de ce qu'elle étoit, & que de plus elles s'y rencontrent de maniere à avoir un infiniment petit du 1er genre commun, & non pas du 2d. Ces deux conditions ne doivent se trouver que rarement ensemble. La premiere seule doit même être rare.

Après cette digression, qui peut être pardonnée à la nouveauté du sujet, & à la necessité de le déveloper, reprenons la matiere principale. Si dans le cas que nous venons de voir, un seul point donne plus de Racines qu'il ne semble en pouvoir donner, il y en a d'autres où l'on trouve plus de Racines que l'on n'en cherche, ou que l'on n'a besoin d'en trouver. M. *de la Hire* en donne un exemple dans la Trisection de l'angle *.

Ce Problême se réduit toûjours à une Equation déterminée du 3eme degré, & M. *de la Hire* la construit par le Cercle même dont il faut diviser un arc déterminé en 3 parties égales, & par une Hyperbole ou plutôt par deux Hyperboles équilateres entre leurs Asymptotes. Ces Hyperboles coupent le Cercle en 4 points, & déterminent 4 Racines.

D'abord on pourroit peut-être penser qu'il y auroit une racine de trop, puisque l'Equation que l'on construit n'en a que 3, mais une Equation du 3eme degré se construisant par les mêmes Lieux qu'une du 4eme, il faut que la construction de ces deux Equations donne également 4 racines. Ce qui remedie à l'excès dans celle du 3eme degré, c'est que l'on voit aussi-tôt, comme dans le cas proposé,

* V. les M. p. 267.

posé, qu'une des 4 racines est la même, & ne fait rien de plus qu'une des quantités connuës & données dans l'operation, & par conséquent n'est pas une des grandeurs inconnuës que l'on cherche. Si l'équation avoit été veritablement du 4eme degré, cette égalité ne s'y fût point trouvée. Il y a toûjours selon une progression rapportée dans l'Hist. de 1707 * un certain nombre d'Equations déterminées de differents degrés, qui se construisent par deux Lieux du même degré, & il est bon de remarquer ici que dans l'Equation moins élevée il doit toûjours arriver par rapport à celle qui l'est davantage quelque chose de semblable ou d'équivalent à ce que nous venons d'expliquer dans le cas dont il s'agit.

Il reste donc dans ce cas 3 racines ou 3 points d'intersection à considerer. Quand on veut diviser en 3 un arc quelconque, par exemple de 40 degrés, on a necessairement sa corde, & c'est d'une de ses extremités que doit commencer la division. Ainsi il suffiroit d'avoir sur cet arc un point où dût se terminer la premiere des 3 petites cordes égales qui diviseront l'arc. Il suffiroit donc que la construction donnât ce point, & les deux autres qu'elle donne paroissent inutiles. Mais la corde donnée de l'arc de 40 est la même que celle de son complément à 360, qui est l'arc de 320, & le Problême est autant la trisection de l'arc de 320, que celle de l'arc de 40. Il faut un point pour chaque arc, & en voilà déja deux d'utiles.

Le tiers d'un arc ajoûté au tiers de l'autre

* p. 91. 92.

qui lui est contigu est le tiers de la somme des deux arcs, ou du Cercle entier, & par-là le Cercle même est divisé en trois, ce qui dans la même construction produit une solution nouvelle. Mais si la somme des deux arcs y est divisée en trois, leur difference doit l'être aussi, & c'est ce que le troisiéme point d'intersection execute. De ces 3 points, & des divisions qu'ils donnent naît encore la trisection de la moitié de la difference des deux arcs.

Cette construction si riche & si abondante en solutions, n'en produit point d'inutiles, quoiqu'elle en produise plus qu'on n'en cherchoit; car ou l'on les cherchoit sans le savoir, c'est-à-dire qu'elles tenoient necessairement à ce qu'on cherchoit, ou elles apartiennent au Problême tourné de plus de sens, & plus compliqué qu'on ne l'envisageoit d'abord. M. *Descartes* dans la solution du même Problême qu'il a donnée par une autre voie, a laissé une de ses Racines sans en marquer l'usage, mais ce n'est pas à dire qu'elle fût oisive, quoique peut-être l'usage en fût difficile à apercevoir. Non-seulement on fait tout ce qu'on vouloit faire, mais on fait souvent plus qu'on ne pensoit, & souvent même il faut beaucoup de reflexion pour comprendre jusqu'où va tout ce qu'on a fait.

A l'occasion de ce Problême, M. *de la Hire* donne une nouvelle formule fort simple & fort aisée à demontrer pour la Section indéfinie des Arcs circulaires. Nous avons parlé dans les Hist. de 1702, * & de 1707 † de cette sec-

* p. 76. & suiv. † p. 94. & 95.

ſection indéfinie, & des ſolutions qu'on en a données.

M. *de la Hire* remarque qu'il y a des Conſtructions qui donnent des Racines repetées. Ce défaut apparent de la Regle en eſt effectivement une perfection; car cela n'arrive que lorſque les Lieux dont on ſe ſert ſont trop élevés, & que de leurs Equations on en déduiroit une Equation déterminée d'un degré plus élevé que la propoſée.

Il y a certaines operations trompeuſes dont il faut ſe défier. Par exemple, ſi on a une Courbe exprimée par une certaine Equation, & que l'on quarre ou que l'on cube cette Equation, on croira avoir une Courbe d'un degré plus élevé, & differente de la premiere; quelquefois cependant ce n'eſt que la même, & par conſéquent on n'aura que le même nombre d'interſections de cette Courbe avec une autre ligne, quoiqu'on ſe fût peut-être propoſé d'en avoir davantage.

Quelquefois ce nombre eſt trop petit, parce qu'on n'a pas conſtruit la Courbe qu'il falloit, quoiqu'on l'ait employée dans les operations, & c'eſt là un des principaux défauts où l'on tombe. Par exemple, on aura pris d'abord pour premier Lieu une Parabole cubique, qui eſt fort ſimple, & fort en uſage. On n'aura pû s'en ſervir pour le ſecond Lieu ſans la quarrer, & enſuite quand on vient à la conſtruction de l'Equation propoſée, on emploie pour un des deux Lieux la Parabole cubique telle qu'on l'a priſe d'abord, au lieu de l'emploïer *cubique-quarrée*, comme elle eſt entrée dans les operations, ce qui auroit donné une autre Courbe, ou du moins

la même Courbe avec plus de *Rameaux*, & un plus grand nombre d'interſections avec le ſecond Lieu.

M. *de la Hire* ne compte pas pour un défaut de la Regle que l'on ne trouve aucune racine de l'Equation, quand même les Lieux qu'on a pris ſeroient les plus ſimples qu'il ſoit poſſible, ſi d'ailleurs ils n'ont par eux-mêmes aucune des racines cherchées. Il veut qu'on les prenne tels, qu'ils puiſſent contenir ce qu'on leur demande. Ainſi le plus ſûr eſt, ſelon lui, de conſtruire une Equation par deux Courbes qui comme la Parabole ayent des Ordonnées depuis Zero juſqu'à l'Infini, tant poſitives que negatives, car dans ce nombre infini d'Ordonnées de toutes grandeurs, & de toute eſpece ſe trouveront celles qui exprimeront les Racines de l'Equation propoſée. Un Cercle ou toute autre Courbe bornée pourroit les manquer. Il eſt vrai que ce ſeroit-là une reſtriction très-conſiderable à la Regle, & qu'elle perdroit infiniment de ſon univerſalité, ce qui eſt une des prétentions de M. *Rolle*, mais rien n'oblige à lui conſerver la gloire de cette univerſalité prétenduë, & il ne s'agit que de ſa verité.

GEO-



GEOMETRIE.

SUR UNE INTEGRALE DONNE'E PAR M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL.

OU SUR LES PRESSIONS DES COURBES EN GENERAL.

* L'Hist. de 1700 † a expliqué en quoi consistoit le Problême de *la Courbe qu'un Corps qui la décriroit en descendant librement presseroit dans tous ses points d'une force toûjours égale à celle de sa pesanteur absoluë.* Feu M. le Marquis de *l'Hôpital* en résolvant ce Problême se servit d'un tour d'*integration* adroit & singulier, dont il borna l'usage à ce qu'il avoit alors entrepris. Mais M. *Varignon*, dont le zele pour la gloire de ce grand Geometre lui fait dire *qu'il ne prétend presque rien donner ici de lui*, montre que ce même tour, ou cette même *Integrale* peut aller beaucoup plus loin, & s'étendre à tous les Problêmes, où, comme dans celui de M. de l'Hô-

* V. les M. p. 196. † p. 100. & suiv.

l'Hôpital, il s'agit de pressions causées sur des Courbes par la pesanteur & par la force Centrifuge d'un Corps qui les décrit en tombant librement. Il faut se rappeller ici ce qui a été dit sur la force Centrifuge dans l'Hist. de 1706*, & sur les pressions des Courbes dans celle de 1708†. Ces principes supposés, nous allons donner une ébauche de la Theorie de M. *Varignon*.

En suivant la route que M. de *l'Hôpital* avoit ouverte, il donne en général la Courbe toûjours pressée selon telle puissance qu'on voudra des hauteurs d'où le Corps sera tombé à chaque instant. On suppose d'ordinaire que les vitesses acquises à chaque instant par un Corps qui tombe sont comme les racines des hauteurs d'où il est tombé depuis l'origine de sa chute, & par conséquent si les pressions sont comme ces hauteurs, elles sont comme les quarrés des vitesses, si elles sont comme les quarrés des hauteurs, elles sont comme les 4emes puissances des vitesses, &c. les hauteurs sont les Ordonnées de la Courbe générale.

Tant que l'on y suppose les pressions variables, ce qui comprend tous les cas possibles, horsmis le seul où elles sont constantes, on voit que la Courbe ne peut avoir une derniere Ordonnée infinie, car elle devient *imaginaire* dès qu'on lui en veut donner une. Il ne peut donc y avoir de pression infinie, & cela s'accorde avec ce que nous avons dit dans l'Hist. de 1706, que la force centrifuge ne peut être *réellement* & physiquement infinie, non plus que la pesanteur qui n'est elle-mê-

* p. 69. & suiv. † p. 102. & suiv.

même qu'une force centrale. Puisque ces deux forces finies font la pression, il est necessaire qu'elle ne soit jamais que finie. Quand une Courbe devient imaginaire, c'est-à-dire que non seulement il n'y a plus alors de Courbe, mais qu'il ne peut pas même y avoir de ligne droite, & en effet la ligne droite ne peut être décrite dans le cas present, puisque la force centrifuge qu'on y suppose n'en fait jamais décrire une, & qu'au contraire sa fonction perpetuelle est d'en détourner le Corps.

Si dans la Courbe générale de M. *Varignon* on suppose les pressions constantes, ce qui est le cas de M. de *l'Hôpital*, on voit naître deux Courbes particulieres, l'une imaginaire, l'autre réelle. Il peut paroître bisarre que la même supposition produise ces deux Courbes d'une nature entierement opposée, mais voici d'où cela vient, & il n'arrive par le Calcul que ce qui doit arriver selon la simple Metaphysique. Les pressions peuvent être constantes en deux manieres. Elles le seront, si l'action tant de la pesanteur que de la force centrifuge est constante. L'action de la pesanteur ne peut être toûjours la même que sur une ligne droite, ou horizontale, ou inclinée ; mais dès que la ligne est droite la force centrifuge n'agit plus, donc il y a contradiction que les pressions soient constantes de cette façon, & la Courbe est imaginaire. Mais si l'action de la pesanteur, & celle de la force centrifuge varient de maniere que toutes deux ensemble elles soient toûjours égales à une quantité constante, ainsi que nous l'avons expliqué dans l'Hist. de 1708,

la Courbe, qui est celle de M. de *l'Hôpital*, est réelle. La variation perpetuelle des deux causes demande que les vitesses, & par conséquent les hauteurs, ou les Ordonnées de la Courbe varient, & delà il suit que ces Ordonnées ne peuvent plus être comme des pressions constantes. Il peut donc y avoir, & il y a effectivement une derniere Ordonnée infinie; qui represente une vitesse & non pas une pression infinie, & de toutes les Courbes envelopées dans la Courbe générale elle est la seule qui ait une pareille Ordonnée.

Il faut remarquer que dans la supposition des pressions constantes, la Courbe n'est imaginaire que parce que l'on conçoit la pesanteur & la force Centrifuge constantes, & de plus agissant ensemble. Mais si l'on conçoit la pesanteur agissant seule, la Courbe deviendra une ligne droite réelle, horizontale, ou inclinée, comme nous l'avons dit.

Puisque les pressions étant inégales, la Courbe générale ne peut avoir d'Ordonnée infinie, ou ce qui revient au même, s'étendre à l'infini, les Courbes particulieres qu'elle produira seront *bornées*. Ainsi si les pressions doivent être comme les racines des hauteurs, ou comme les vitesses, on a la Cycloïde trouvée par M. *Parent* en 1706. Si les pressions sont comme les hauteurs ou les quarrés des vitesses, c'est le Cercle de M. *Saurin* trouvé dans la même année. Si les pressions sont comme les quarrés des hauteurs, c'est l'*Elastique* de feu M. *Bernoulli* * &c.

M. *Varignon* pour étendre encore plus sa Theo-

* V. l'Hist. de 1705. p. 168. 169. & 181.

Theorie, & l'uſage de l'Integrale de M. de *l'Hôpital*, ſuppoſe enſuite que les preſſions, toûjours proportionnées aux puiſſances quelconques des hauteurs, ne ſoient cauſées que par la ſeule force Centrifuge, & il trouve une ſeconde Courbe générale preſque entierement ſemblable à la premiere, & il eſt viſible qu'elle doit l'être, puiſque la peſanteur & la force centrifuge étant de la même nature, toutes deux, par exemple, incapables d'Infini, la ſomme des deux, ou une ſeule ne doivent produire que les mêmes effets pour la génération d'une Courbe. Auſſi les Courbes particulieres de ce ſecond cas ſe trouvent-elles les mêmes que celles du premier.

Si à la ſuppoſition de la force centrifuge agiſſant ſeule on ajoûte qu'elle ſoit conſtante, il naîtra deux Courbes, l'une réelle, l'autre imaginaire, nouvelle biſarrerie apparente du Calcul, que nous pouvons encore juſtifier, pourvû que nous remontions juſqu'à la premiere idée de la force centrifuge.

Elle eſt d'autant plus grande, ou pour parler plus préciſément, elle agit d'autant plus à un point quelconque d'une Courbe que le Corps qui tombe a plus de viteſſe, & que la Courbe eſt plus courbe en ce point-là. La viteſſe ſe meſure par la hauteur d'où le Corps auroit dû tomber pour l'acquerir, & cette hauteur eſt comme le quarré de la viteſſe acquiſe. Une Courbe eſt d'autant plus courbe à un point quelconque que le Rayon de ſa Dévelopée y eſt plus petit. Donc l'action de la force centrifuge à un point quelconque eſt le quarré de la viteſſe diviſé par le Rayon de la Dévelopée, ou, ce qui eſt la même choſe,

 le

le rapport d'une de ces grandeurs à l'autre. Ce rapport peut être constant en deux manieres ; ou les deux grandeurs dont il est formé le seront chacune, ou toutes deux varieront toûjours selon la même proportion. Si c'est la premiere maniere, & si par conséquent la vitesse est constante, les Ordonnées de la Courbe sont toûjours égales, c'est-à-dire qu'elle n'est plus une Courbe, ni même une ligne droite à cause de la force centrifuge supposée. Mais si le rapport varie de la seconde maniere, les vitesses & par conséquent les Ordonnées sont inégales comme il faut qu'elles le soient, & on a une Courbe très-réelle. Voilà tout le mystere. Le Calcul ne donne que les effets, & souvent enveloppe & cache les causes.

Il reste encore deux suppositions de M. *Varignon*, l'une que la Courbe ne soit pressée que par la seule pesanteur, l'autre que la pression causée par la pesanteur soit à celle de la force centrifuge en telle raison qu'on voudra, mais ni l'une ni l'autre ne nous donne lieu à de nouvelles reflexions, & ce que nous avons dit des Courbes nées des deux premieres suppositions enferme tout ce que nous pourrions dire de celles-ci.

SUR



SUR LES FORCES CENTRALES INVERSES.

* TOut ce que nous avons dit jusqu'à present sur le Problême des forces Centrales ne regardoit que ce Problême *direct*, c'est-à-dire qu'une Courbe étant donnée il s'agissoit de savoir quelle étoit à chaque point de cette Courbe l'action de la force centrale ; par exemple, si un Corps décrivoit une Section Conique, & que la force centrale le tirât ou le poussât vers un foyer, il falloit trouver que cette action à chaque point de la Section étoit en raison renversée des quarrés de la distance de chaque point au foyer. Maintenant le Problême est *inverse* ; la force centrale étant donnée il faut trouver la Courbe ; si l'on sait que les actions de cette force sur une Courbe sont en raison renversée des quarrés des distances de chaque point de la circonference au point où elle tend, il faut déterminer que cette Courbe est une Section Conique.

Le Problême direct ne demande que le Calcul Differentiel, l'Inverse demande le Calcul Integral. Car dans le direct on exprime la force Centrale par les infiniment petits d'une Courbe en général, qui sont ensuite specifiés par la Courbe donnée ; mais dans l'inverse, avec ces infiniment petits ainsi specifiés on cher-

*V. les M. p. 682, & 307.

cherche la Courbe dont ils sont infiniment petits, ce qui dépend indispensablement de quelque integration.

Nous avons déja fait sentir dans l'Hist. de 1702 * la difference du Calcul Differentiel & de l'Integral. L'un differentie tout, mais l'autre n'integre pas tout, soit que tout ne soit pas integrable en soi-même, soit que ce qui l'est en soi-même ne le soit pas toûjours pour nôtre Art, ou ne le soit qu'avec de trop grandes difficultés.

M. *Herman* Professeur en Mathematique à *Padouë*, & M. *Bernoulli* ayant travaillé au Problême inverse des forces centrales, M. *Varignon* qui avoit tant manié le direct, voulut voir si les formules qu'il en avoit données, & qui étoient toutes des expressions de forces centrales où entroient les infiniment petits des Courbes, souffriroient l'integration. Il eut le plaisir de voir que de 18 de ces formules générales, 14 s'integroient assez facilement, & retomboient dans les solutions de Mrs *Herman* & *Bernoulli* trouvées par d'autres voies. Cette integrabilité facile est un bonheur, dont on n'a qu'à joüir, quand il s'offre naturellement ; sinon, il faut savoir éviter les écueils qui se presenteroient d'un côté, & essayer de se tourner de quelque autre, & c'est ce que M. *Bernoulli* a pratiqué avec beaucoup d'adresse dans la route qu'il avoit prise.

ASTRO-

* p. 80.



ASTRONOMIE.

SUR LE MOUVEMENT DE LA LUNE.

* LA proximité de la Lune a donné aux Astronomes la commodité d'observer sûrement & exactement la variation de la grandeur apparente de son diametre, qui suit necessairement la même proportion que la variation de ses distances à la Terre. Ainsi son plus petit diametre apparent étant de 29′ 30″, & le plus grand de 33′ 30″, ce qui est selon la raison de 177 à 201, si la plus grande distance de la Lune à la Terre est 201, la plus petite sera 177.

Delà il suit que si l'on suppose que la Lune décrive une Ellipse dont la Terre occupe un des foyers, le grand Axe de cette Ellipse sera 378, somme de 177, & de 201, & la distance des foyers 24, ce qui donne 12 pour la distance d'un des foyers au centre, & pour le petit Axe un nombre irrationel un peu plus grand que 376. Si l'on a d'ailleurs par la parallaxe de la Lune sa distance à la Terre évaluée en demi-diametres de la Terre, tous ces nombres se changeront en d'autres qui au-

* V. les M. p. 394.

auront rapport à la grandeur abſoluë de ce demi-diametre de la Terre qui eſt de 1500 lieuës. Ainſi au lieu de 177 & de 201 on aura, ſelon M. *de la Hire*, 5597 & 6356 qui auront le même rapport, & dont chaque unité vaut une centiéme partie du demi-diametre de la Terre, c'eſt-à-dire 15 lieuës.

L'Ellipſe de la Lune étant donc établie & déterminée ſur le fondement de la variation apparente de ſon diametre, il eſt certain que ſon mouvement, fût-il égal & uniforme en lui-même, doit paroître inégal à la Terre placée dans un foyer, & que cette inégalité doit dépendre de la nature de l'Ellipſe, ou ce qui eſt la même choſe, du rapport de la diſtance de ſes foyers au grand Axe; car ſi la diſtance des foyers devenoit nulle, c'eſt-à-dire que l'Ellipſe devînt Cercle, un mouvement qui ſeroit égal, le paroîtroit auſſi, & ſi cette diſtance devenoit égale au grand Axe, l'Ellipſe ne ſeroit plus qu'une ligne droite ſur laquelle le mouvement paroîtroit le plus inégal qu'il ſoit poſſible. Puiſque le mouvement de la Lune nous paroît inégal d'une certaine inégalité déterminée par la nature particuliere de l'Ellipſe, il faut, ſelon ce qui a été dit dans l'Hiſt. de 1704*, trouver pour chaque point de l'Orbite de la Lune quelle eſt la difference de ce mouvement inégal, qui eſt *l'apparent* ou *le vrai*, à un mouvement feint qui ſeroit égal & qu'on appelle *moyen*. Cette difference eſt l'*Equation du centre* de la Lune.

Les Aſtronomes appellent *Anomalie* un arc quelconque de l'Orbite d'une Planete depuis ſon

* p. 81. & 82.

son Aphelie, si son mouvement se rapporte au Soleil, ou depuis son Apogée, s'il se rapporte à la Terre, ce qui n'est que pour la Lune seule. Ils comptent aussi l'Equation du centre depuis l'Aphelie ou l'Apogée, & supposent que la Planete parte de l'un ou de l'autre de ces points. Comme ils sont les plus éloignés du foyer où se rapporte le mouvement, & d'où l'on suppose qu'il est vû, c'est vers ces points que le mouvement apparent ou vrai est le plus lent, & plus surpassé par le moyen. Donc l'Equation du centre étant nulle précisément au point de l'Aphelie ou de l'Apogée, puisque c'est-là qu'on suppose que le mouvement de la Planete commence, cette Equation sera *soustractive* pour les degrés d'anomalie suivans, parceque du mouvement moyen que l'on a toûjours il en faudra ôter alors une certaine quantité pour avoir le mouvement vrai. Le moyen ayant commencé par devancer le vrai, il le devance toûjours, parce que ses avantages sur le vrai s'accumulent toûjours, mais comme ces mêmes avantages vont en diminuant à mesure que l'anomalie augumente, ou, ce qui est le même, que la Planete s'éloigne de son Aphelie ou Apogée, le mouvement moyen devance toûjours le vrai de moins en moins, & enfin ils se retrouvent ensemble au Perihelie ou au Perigée. Delà vient que l'Equation est soustractive dans tout le premier demi-cercle d'Anomalie, qu'elle croît toûjours jusqu'au point de la *moyenne distance*, qui est au quart de cercle, & qu'ensuite elle diminuë toûjours jusqu'au Perihelie ou Perigée, où elle est Zero. Ensuite elle est *additive* dans tout le demi-

mi-cercle ſuivant, &c. car ce n'eſt que ce qu'on vient de dire, mais renverſé. La plus grande Equation du centre de la Lune, ou celle des moyennes diſtances, eſt ſelon les Tables de M. *de la Hire* de 4° 59′ 16″.

Pour avoir dans l'Ellipſe d'une Planete les meſures du mouvement vrai & du moyen, *Kepler* diviſe toute ſon aire elliptique en parties égales par des lignes droites, qui du foyer où ſe rapporte le mouvement ſont tirées à toute la circonference. Puiſque ces lignes comprennent des Secteurs ou triangles elliptiques égaux en ſuperficie, les arcs auſquels elles ſe terminent ſont neceſſairement inégaux, plus grands aux endroits plus proches du foyer, & réciproquement. Ces triangles égaux repreſentent les parties du mouvement moyen, ou, ce qui revient au même, les temps pendant leſquels ſe font les differentes parties du mouvement vrai, repréſentées par les arcs elliptiques inégaux correſpondants. Cette hypotheſe eſt Phyſique auſſi bien qu'Aſtronomique, c'eſt-à-dire qu'elle peut non-ſeulement fonder les calculs, auſquels il ſuffit de ſe rencontrer avec les phenomenes, mais encore fournir l'explication de la mechanique des mouvements céleſtes. Car ſi une matiere fluide contenuë dans un plan elliptique ſe meut autour d'un foyer, il eſt fort naturel que par rapport à ce foyer elle parcoure en temps égaux des Secteurs elliptiques ou des ſuperficies égales, ce qui rend inégaux les arcs décrits en même temps par une Planete qu'elle emportera. On prend des angles qui ſoient entre eux comme les ſuperficies elliptiques par rapport à la demi-ſuper-

ſuperficie elliptique totale, & la difference de ces angles à ceux du vrai mouvement eſt l'Equation du centre.

Mais M. *de la Hire* fait voir par un calcul qu'il expoſe tout du long, que ſelon cette hypotheſe l'Equation du centre de la Lune dans la moyenne diſtance ſeroit de 7° 16′ 54″, au lieu de 4° 59′ 16″, ou de 5° qu'elle ne doit jamais paſſer, de l'aveu même de *Kepler*; car il ne trouve pas par ſon calcul cette exorbitante Equation, mais c'eſt que dans l'Ellipſe de la Lune il ne poſe pas la diſtance des foyers aſſez grande. Dès qu'on vient à la poſer telle qu'elle eſt, cette Equation qu'on ne peut recevoir ſuit de ſon hypotheſe.

D'autres Aſtronomes venus après lui en ont pris une autre, qui à la verité n'a rien de phyſique, mais qui ſuffit pour l'Aſtronomie. Autour du ſecond foyer de l'Ellipſe, c'eſt-à-dire de celui où ne ſe rapporte pas le mouvement, ils décrivent au dedans de l'Ellipſe un Cercle, qui étant diviſé en arcs égaux, ils tirent par ces diviſions des lignes juſqu'à la circonference de l'Ellipſe, & des points ainſi déterminés ſur cette circonference, ils tirent des lignes droites au premier foyer. Par-là il ſe forme des angles égaux & inégaux correſpondants, dont les differences ſont l'Equation du centre.

M. *de la Hire* prétend encore qu'à l'égard de l'Equation de la Lune cette ſeconde hypotheſe jette dans l'erreur, mais qu'on peut la rectifier en décrivant le Cercle qui meſure le mouvement moyen, non autour du ſecond foyer, mais autour d'un autre point qui ſoit plus proche du premier, & dont il dé-

détermine geometriquement la poſition ſur le grand Axe.

En un mot la diſtance des foyers étant neceſſairement telle qu'elle eſt dans l'Ellipſe de la Lune par l'obſervation de ſes diametres apparents, & la plus grande Equation du centre ne pouvant être plus grande que 5°, comme tous les Aſtronomes en conviennent, il eſt impoſſible de trouver une meſure du mouvement moyen & du vrai, qui dépende directement & immediatement des foyers. Et ſi l'hypotheſe de *Kepler* qui s'y rapporte uniquement ne laiſſe pas de réüſſir pour les autres Planetes, c'eſt que la diſtance des foyers de leurs Ellipſes n'eſt pas abſolument déterminée par obſervation, & qu'on eſt aſſez libre de la poſer telle que les autres beſoins la demandent. Du moins eſt-ce là ce que M. *de la Hire* ſoupçonne avec aſſez de vrai-ſemblance.

Il eſt à remarquer que la plus grande & la plus petite diſtance de la Lune à la Terre, d'où dépend la diſtance des foyers, & la nature de l'Ellipſe, ne ſont 6356, & 5597, que quand l'Apogée ou le Perigée de la Lune ſont joints au Soleil, ce qui revient à ce qu'on a dit dans l'Hiſt. de 1702 *. Si cet Apogée ou ce Perigée ſont à 3 Signes du Soleil, la plus grande diſtance ne change point, mais la plus petite eſt de 5769 au lieu de 5597, ce qui change le rapport des deux diſtances, & par conſéquent la nature de toute l'Ellipſe, qui depuis la conjonction au Soleil a dû n'arriver à ce terme que par degrés, c'eſt-à-dire en variant toûjours. On ne ſera pas ſurpris que les

* p. 101. & 102.

les calculs astronomiques manquent quelquefois d'attraper juste les points de cette Ellipse toûjours variable, ne le fût-elle que par des principes connus, mais il y a bien de l'apparence qu'elle l'est encore par des irregularités physiques, & imprévûës, qui ne se soûmettent point au calcul. La grande proximité de la Lune nous les rend plus sensibles que dans le cours des autres Planetes, où elles ne doivent pas avoir moins de lieu. De plus comme il est certain que les mouvements de la Lune varient selon les differentes situations où elle est par rapport au Soleil, on peut croire avec raison que le Soleil a plus d'empire sur elle, que sur les Lunes ou Satellites de Jupiter & de Saturne dont il est beaucoup plus éloigné, & qu'à cet égard ces Satellites doivent être moins irreguliers. Ainsi tout concourt à rendre contre toute apparence ce qui est plus proche de nous plus difficile à connoître.



SUR LES REFRACTIONS.

LA matiere des Refractions est trop Physique, & trop dépendante des experiences pour pouvoir être promptement finie. Le P. *Laval* qui continuë de s'y appliquer avec soin & avec succès, a ajoûté une observation singuliere à toutes celles qu'il avoit déja communiquées à l'Academie*.

La

* V. l'Hist. de 1706. p. 127. & suiv. de 1707. p. 111. & suiv. & de 1708. p. 129. & suiv.

La hauteur meridienne du centre du Soleil obſervée exactement tant au Solſtice d'Hiver qu'au Solſtice d'Eté donne la diſtance des deux Tropiques, & la moitié de cette diſtance eſt celle de l'Equateur à l'Ecliptique, ou, ce qui eſt la même choſe, l'angle ſous lequel l'Ecliptique coupe l'Equateur, Element très-important dans toute l'Aſtronomie. Differents Obſervateurs & ſouvent le même en differents temps, trouvent cet angle different, quelquefois d'une quantité aſſez conſiderable, & cela avec les Inſtruments les plus parfaits, & en operant avec la plus grande exactitude. Seroit-ce qu'effectivement l'obliquité de l'Ecliptique changeroit? Quelques-uns l'ont crû poſſible; mais outre que dans ce changement prétendu il ne paroît rien de reglé, ce qui eſt déja un grand préjugé contre le changement, le P. *Laval* leve entierement par une obſervation qu'il a faite le ſcrupule qu'on pourroit avoir.

Le 22 Juin 1710 il obſerva la hauteur meridienne apparente du bord ſuperieur du Soleil de 70° 25′ 50″, & le lendemain 36 heures après que le Solſtice étoit paſſé, & par conſéquent le Soleil devant être plus bas, il obſerva cette même hauteur de 70° 26′ 0″, c'eſt-à-dire, de 10″ plus grande, au lieu qu'elle eût dû être plus petite. Il eſt vrai qu'à un Quart de Cercle de 3 pieds de rayon, tel que celui dont il ſe ſervoit, 10″ ne font pas une grandeur bien ſenſible, mais enfin il eſt ſûr que la hauteur du 23 étoit au moins égale à celle du 22, ce qui ne devoit pas être, & ne peut être attribué qu'à l'irrégularité de la Refraction.

Le

Le P. *Laval* avoit remarqué que la Refraction étoit plus grande en Hiver qu'en Eté, mais il doutoit qu'elle pût varier fenfiblement d'un jour à l'autre à la même heure, & c'eft ce que fon obfervation lui a appris.

Elle s'accorde avec ce que nous avions déja dit d'après lui dans l'Hift. de 1706, que la refraction eft moindre par un Nord-Oüeft, ou un Sud-Eft frais. En effet le 22 il foufloit un Nord-Oüeft frais, & le 23 un Sud-Oüeft foible.

Jufqu'à prefent c'eft une circonftance qui n'a point été marquée dans le détail des obfervations Aftronomiques, que celle du Vent, & l'on n'eût pas crû qu'elle eût dû jamais y entrer. Cependant fi la découverte naiffante du P. *Laval* fe confirme, fi la Refraction a quelques variations qui fe reglent par rapport aux Vents, ou en général à la conftitution de l'Air, il faudra ajoûter à la Table Aftronomique de la Refraction, c'eft-à-dire à celle où elle n'eft calculée que pour les differentes hauteurs fur l'Horifon, une Table Phyfique, qui reprefentera fes inégalités dépendantes de la conftitution de l'air, & l'on confultera ces deux Tables pour corriger les hauteurs apparentes des Aftres, & les réduire aux vraïes. Le P. *Laval* entrevoit déja un commencement de cette feconde Table, qui feroit & fort curieufe, & fort utile, quoiqu'elle laiffât toûjours quelque chofe à defirer. L'extrême précifion, & nos foins pour y parvenir reffemblent aux Courbes qui ont des Afymptotes.



SUR LES TACHES DU SOLEIL.

MEssieurs *Cassini*, *de la Hire*, & *Maraldi* n'ont vû cette année qu'une Tache dans le Soleil. Elle parut tout d'un coup le 24 Octobre, car on n'avoit rien aperçû le jour précedent, elle étoit fort grande, seule, & déja dans la partie Occidentale du Disque, éloignée seulement du centre apparent de 1′ 7 ou 8″ en longitude. Les nuages empêcherent qu'on ne pût observer ce jour-là sa latitude ou déclinaison, mais le lendemain on la trouva Meridionale de 3′ à peu près. Le 28 qu'elle fut encore observée, elle continuoit son cours vers l'Occident selon l'hypothese des 27 jours $\frac{1}{2}$, mais sa déclinaison étoit devenuë Septentrionale presque de la même quantité dont elle étoit Meridionale le 25. On ne pût l'observer les jours suivans à cause des nuages. Quoiqu'elle fût fort grande, elle ne reparut point dans le temps où elle l'auroit pû après avoir fait sa révolution derriere le Soleil.

M. *Cassini* le fils ayant placé cette Tache sur le globe du Soleil suivant la Methode expliquée dans l'Hist. de 1707*, trouva que le 24 Octobre à 7 heures $\frac{1}{2}$ du soir elle étoit précisément au milieu du disque avec une latitude meridionale de 12 à 13 degrés, le demi-dia-

* p. 132. & suiv.

diametre du Soleil étant supposé en avoir 90.

NOus renvoyons entierement aux Memoires

* Les Observations de l'Eclipse de Lune & de celle de Soleil de cette année faites par M[rs] *de la Hire*, *Cassini*, & *Maraldi*.

† L'Observation de la Conjonction de la Lune & d'une des Pleïades par M. *Maraldi*.

‡ L'Ecrit de M. *Cassini* le fils sur la necessité de bien centrer les Verres de Lunette.

* L'Observation du passage de Jupiter proche d'une Etoile du Scorpion par M. *Maraldi*.

* V. les M. p. 225. 229. 233. 261. 263. 265. 289.
† V. les M. p. 292. ‡ V. les M. p. 299.
* V. les M. p. 417.



CATOPTRIQUE.

DES FOYERS PAR REFLEXION EN GENERAL.

* L'Article de Dioptrique qui eſt dans l'Hiſt. de 1704 † ſur les Foyers par refraction fait une eſpece de ſymmetrie avec celui-ci où l'on conſidere les Foyers par reflexion, & ſi l'on faiſoit un Corps d'Optique ce dernier devroit marcher avant l'autre, parce que la Catoptrique comme plus ſimple précede la Dioptrique. Ce que M. *Guiſnée* avoit fait ſur une des deux eſpeces de Foyers, M. *Carré* l'a fait auſſi ſur l'autre; les deux Theories ſe rapportent également à celle des Cauſtiques expliquée dans l'Hiſt. de 1703 ‡. Il s'agit maintenant de déterminer ſur l'Axe d'un Verre de courbure quelconque quel eſt le point où cet Axe touche la Cauſtique par reflexion, ou, ce qui revient au même, quel eſt le point où les rayons d'un point lumineux qui ſont refléchis à la rencontre du Verre, & qui en ſe réfléchiſſant ont pris de nouvelles directions ſe réüniſſent en plus grande quantité que par tout ailleurs.

Com-

* V. les M. p. 60. † p. 94. & ſuiv. ‡ p. 84. & ſuiv.

Comme le rapport conſtant des Sinus d'incidence & de refraction eſt le grand principe de la Dioptrique, celui de la Catoptrique eſt l'égalité perpetuelle des angles d'incidence, & de refléxion. Après cela, il ne reſte à conſiderer que la courbure du Verre, & la direction des rayons incidents. Auſſi la Formule générale de M. *Carré*, qui eſt la même que celle de M. de l'*Hôpital* pour les Cauſtiques par refléxion, ne comprend-elle que le Rayon de la Dévelopée d'où dépend la courbure du verre, & la diſtance du point lumineux au verre, d'où dépend la direction des rayons incidents. Nous ſuppoſons ici les idées expliquées dans l'Hiſt. de 1704.

Si l'on ne veut conſiderer que des Verres ſphériques, qui ſont effectivement les plus ordinaires, le rayon de la Dévelopée devient le demi-diametre de la Sphére dont ils ſont une portion. Prenons d'abord les Miroirs ſphériques concaves, dont les repreſentations ſont les plus ſurprenantes, & en apparence les plus biſarres. Tantôt l'Image eſt au-delà du Miroir, tantôt elle eſt en deçà, & quand elle eſt en deçà, tantôt elle eſt entre le Miroir, & l'Objet, tantôt elle ſe confond avec l'Objet même, tantôt elle eſt derriere lui. Tout cela dépend de la diſtance de l'Objet au Miroir, car on voit par la Formule de M. *Carré* que ſelon que cette diſtance varie, le lieu du Foyer par reflexion, ou, ce qui eſt la même choſe, le lieu de l'Image varie auſſi. Nous allons tâcher de rendre ſenſible la neceſſité de ces phenomenes.

Il faut imaginer que le Miroir concave ait un Axe prolongé à l'infini. Le point où cet

axe rencontre la surface du Miroir en est le *sommet*. Si l'on place d'abord l'Objet ou le point lumineux à ce sommet, & qu'ensuite on le fasse mouvoir vers l'autre extrémité de l'Axe infiniment éloignée, jusqu'à ce qu'enfin il y soit parvenu, il seroit aisé de prouver, & même on conçoit aisément sans preuve, que le *chemin* de l'Objet étant toûjours de même part, & en un mot *regulier*, le chemin correspondant de l'Image ne peut être que regulier aussi, c'est-à-dire tel que la variation des Ordonnées d'une Courbe, toûjours assujetties à certaines loix. Cela supposé, quand j'aurai par la Formule de M. *Carré* quelques lieux de l'Image, la necessité de la variation reguliere me donnera tous les autres; je trouve qu'il ne m'en faut que deux.

Si je place l'Objet au sommet du Miroir, ou, ce qui est le même, si la distance de l'Objet au Miroir est nulle, la Formule donne la distance de l'Image au Miroir nulle aussi, mais negative, ce qui signifie que cette Image est au-delà du Miroir, & comme appliquée sur sa convexité, parcequ'en faisant le calcul de la Formule on a pris pour positives toutes les grandeurs qui étoient du côté de la concavité. Si ensuite j'éloigne l'Objet du Miroir & le place au quart du diametre de la Sphére, je vois par la Formule le Foyer devenu infini, c'est-à-dire que l'Image est infiniment éloignée, & je puis concevoir qu'elle est encore au-delà du Miroir, puisqu'elle a commencé par y être. Voilà les deux lieux seuls que j'ai besoin d'avoir par la Formule, les autres viennent ensuite d'eux-mêmes.

Puisqu'au chemin fini, & même très-court qu'a

qu'a fait l'Objet en deçà du Miroir depuis ſon ſommet juſqu'au quart de ſon diametre, répond un chemin infini de l'Image au-delà du Miroir, il faut qu'elle s'en éloigne toûjours plus de ſon côté que l'Objet ne fait du ſien. Cependant il faut remarquer que la progreſſion ſelon laquelle elle s'en éloigne, quoiqu'elle ait un dernier terme infini, ne fait pas de grands *ſauts*, tant qu'elle demeure dans le fini. Ainſi ſi l'on diviſe le quart du diametre de la Sphére en 10 parties égales à compter du ſommet où ſera Zero, & que l'on conçoive l'Objet placé ſucceſſivement ſur chacune de ces diviſions, enſorte que les pas qu'il fera ſeront 0, 1, 2, 3, &c. juſqu'à 10, les pas correſpondants de l'Image ſeront, 0, $1\frac{1}{9}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{7}$, $6\frac{2}{3}$, 10, 15, $23\frac{1}{3}$, 40, 90, l'Infini. Il peut paroître ſurprenant que cette progreſſion qui croît peu ſaute ſi bruſquement de 90 à l'infini, mais tout autre nombre, quelque prodigieux qu'il fût, n'auroit pas plus de rapport à l'infini que 90. De plus ſi le dernier pas de l'Objet qui eſt depuis 9 juſqu'à 10 eſt encore diviſé en 10 parties égales qu'il parcourra ſucceſſivement, & qui ſeront $9\frac{1}{10}$, $9\frac{2}{10}$, &c. on trouvera pour les pas correſpondants de l'Image des nombres plus grands que 90, & toûjours croiſſants, & ce ſeroit encore la même choſe ſi l'on diviſoit en 10 le dernier pas de l'Objet, qui ſera depuis $9\frac{9}{10}$ juſqu'à 10 & ainſi à l'infini, de ſorte que tandis que l'Objet ira de 9 à 10, les pas de l'Image ſeront une infinité de nombres toûjours croiſſants, & à de très-petits pas de l'Objet, il en répondra de très-grands de l'Image.

Si du quart du diametre de la Sphére je continuë à mouvoir l'Objet vers le centre, quel doit être le chemin de l'Image? Il est clair qu'elle ne doit pas revenir sur ses pas, puisque l'Objet ne revient pas sur les siens, & qu'au contraire il poursuit son chemin vers un même côté. Mais comment poursuivra-t-elle le sien après être arrivée à une distance infinie? Il est impossible qu'elle aille au-delà. Voici le dénouëment de la difficulté, il est tiré des mysteres de l'Infini, subtils, si l'on veut & délicats, mais cependant sûrs & invariables. Comme Zero est le terme commun des grandeurs positives décroissantes & des negatives croissantes, ou réciproquement, de sorte qu'il lie ensemble ces deux Suites & les rend continuës, de même l'Infini est le terme commun qui lie les Suites positives croissantes, & les negatives décroissantes, ou réciproquement, & par son moyen les unes sont la continuation des autres. On doit se souvenir que le chemin de l'Image étoit negatif, donc pour le continuer, étant arrivée à l'Infini, elle n'a qu'à le changer en positif, c'est-à-dire qu'au lieu qu'elle étoit au-delà du Miroir, il faut maintenant qu'elle soit en deçà, & qu'elle a passé du derriere du Miroir au devant. L'Infini est tellement par sa nature le terme commun du positif & du negatif, qu'après qu'on a trouvé les 9 nombres $1\frac{1}{9}$ &c. 90, tous negatifs, on ne trouve point que l'Infini le soit, quoiqu'il apartienne à la même progression, c'est qu'il apartient en même temps à une autre qui est positive, & à proprement parler il n'a point de signe non plus que Zero. Ainsi l'Image infini-

finiment éloignée du Miroir n'eſt proprement ni au delà ni en deçà. Elle n'a point de lieu.

L'Objet étant au centre de la Sphére, il eſt évident que l'Image y eſt auſſi, car tous les rayons que l'Objet envoye alors au Miroir lui étant perpendiculaires, ils ne peuvent ſe refléchir que ſur eux-mêmes, & delà vient qu'un Oeil placé au centre d'un Miroir concave ne voit que lui-même dans tout le Miroir. Donc tandis que l'Objet s'eſt mû depuis le quart du diametre de la Sphére juſqu'au centre, l'Image a fait le chemin infini qui eſt depuis l'extremité de l'Axe infiniment prolongé juſqu'au centre, & pendant ce mouvement de l'Objet l'Image étoit toûjours derriere lui, & alloit à ſa rencontre. Elle paroît alors ſuſpenduë en l'air.

Pour trouver la progreſſion ſelon laquelle l'Image fait ce ſecond chemin infini, il ne faut que continuer la diviſion du quart du diametre juſqu'au centre, & par conſequent compter 10, 11, &c. juſqu'à 20. Ce feront-là 10 nouveaux pas de l'Objet. Ceux qui leur répondront dans le chemin de l'Image ſeront, l'Infini, 110, 60, $43\frac{1}{3}$, 35, 30, $26\frac{2}{3}$, $24\frac{2}{7}$, $22\frac{1}{2}$, $21\frac{1}{9}$, 20. Quand l'Image eſt à 20 elle eſt au centre. On entend aſſez que toutes ces parties dont les unités ſont égales à celles de la diviſion du demi-diametre ſe comptent ainſi que ces diviſions depuis le ſommet du Miroir ſur l'axe prolongé.

Il eſt viſible que cette ſeconde progreſſion eſt la même que la premiere renverſée, & dont chaque terme ſeroit augmenté de 20, parcequ'ici 20 tient lieu du Zero de la pre-

miere, & que le second chemin infini de l'Image se termine à 20, comme le premier commençoit à Zero. Dans le premier l'Image s'éloigne peu d'abord du terme d'où elle part, & dans le second elle s'approche sur la fin à petits pas du terme où elle doit arriver, & c'est de la même quantité de part & d'autre, &c.

Si l'on presente une Epée à un Miroir concave, de sorte qu'elle soit dans l'Axe du Miroir, & sa pointe entre le quart du diametre & le centre, il faut donc, puisque l'image est alors derriere l'Objet, & plus éloignée que lui du Miroir, que l'on voie l'image de cette pointe en l'air s'élancer hors du Miroir, vers l'œil de celui qui tient l'Epée, comme si la veritable Epée s'étoit retournée d'elle-même pour se mettre dans une position contraire à celle où on la tenoit. Plus la pointe de l'Epée sera près du quart du diametre, plus son image s'élancera loin du Miroir.

Puisque l'Objet & l'Image se rencontrent au centre, il faut qu'ils se séparent si l'Objet en sort. Faisons-lui continuer le chemin qu'il a commencé vers l'extremité de l'Axe, l'Image continuera aussi celui qu'elle a commencé vers le Miroir, c'est-à-dire qu'alors elle sera entre le Miroir, & l'Objet, toûjours suspenduë en l'air.

Lorsqu'en s'approchant toûjours du Miroir, elle sera arrivée au quart du diametre, l'Objet doit être à l'extremité de l'Axe infiniment éloignée, car quand il étoit à ce même quart du diametre, l'Image étoit à cette même distance infinie, or l'Objet ou point lumineux, & l'Image ou le Foyer sont deux points

points *réciproques*, comme nous avons dit dans l'Hist. de 1704. *. L'Objet arrivé à l'extremité de l'Axe infiniment éloignée ne peut plus faire de mouvement, donc l'Image n'en peut plus faire non plus, & elle ne peut jamais être entre le quart du diametre, & le Miroir.

Il ne sera peut-être pas hors de propos de remarquer ici, que quand on parle absolument du Foyer d'un Miroir concave, on entend celui qui se fait au quart du diametre, & qui répond à la distance infinie de l'Objet, ou, ce qui revient au même, qui est formé par des rayons d'un même point si éloigné qu'ils sont censés paralleles. Tels sont ceux d'un point quelconque du Soleil. La nature de la Caustique faite de ces rayons refléchis fait voir que s'ils tombent sur une demi-Sphére concave parallelement à son axe, ils occupent après la reflexion un espace presque égal à la demi-Sphére sur laquelle ils sont tombés, que cependant ils sont beaucoup plus serrés vers l'axe qu'ils ne l'étoient auparavant, & qu'ils occupent sur la Caustique un espace beaucoup moindre que l'espace correspondant de la demi-Sphére sur lequel ils sont tombés, que par consequent si l'on veut avoir un Foyer brûlant, il ne faut prendre de toute la demi-Sphére qu'un certain espace autour de son axe, & que le Foyer correspondant à cet espace est fort éloigné d'être geometriquement un point, quoiqu'on le puisse prendre physiquement pour en être un, & qu'il croît selon la même proportion que la Sphére est plus grande, ou, ce qui re-

* p. 107.

revient au même, selon qu'il est lui-même à une plus grande distance du Miroir, d'où il suit que sa force de brûler diminuë à mesure que cette distance augmente. Cela revient en partie à ce qui a été dit sur les Foyers par refraction dans l'Hist. de 1700 *. Celle de 1704 en traitant de ces mêmes Foyers a assez fait entendre comment ce qui est concave devient plan ou convexe dans une même formule. Ainsi celle de M. *Carré* qui nous a donné jusqu'ici les proprietés des Miroirs concaves doit s'étendre également aux Miroirs plans ou convexes.

On y voit d'abord pour ceux qui sont plans que la distance de l'Image au Miroir est égale à celle de l'Objet, mais negative, c'est-à-dire que l'Objet est vû autant au-delà du Miroir qu'il est en deçà. De cette proprieté très-connuë s'ensuivent un grand nombre d'autres qui ne le sont guere moins.

Quant aux Miroirs convexes, l'Image est toûjours au-delà. Si la distance de l'Objet au Miroir est nulle, celle de l'Image l'est aussi. Si l'Objet est infiniment éloignée, l'Image est au quart du diametre de la Sphére dont le Miroir est portion, & il est visible qu'elle ne peut jamais être plus loin, ni même être si loin réellement. En divisant toûjours le demi-diametre de la Sphére en 20 à compter du sommet du Miroir, le chemin de l'Objet sera cette progression déja trouvée pour les Miroirs concaves, l'Infini, 90, 40, &c. & celui de l'Image, 10, 9, 8, &c.

Après avoir consideré les rapports de distance que l'Objet & l'Image ont aux trois diffe-

* p. 164. & 165.

differentes especes de Miroirs, il reste à considerer leurs rapports de grandeur.

Dans un Miroir plan, l'Image est égale à l'Objet, parce qu'elle est vûë autant au-delà du Miroir que l'Objet est en deçà. On se peut convaincre de cette raison de l'égalité de l'Image par une experience très-facile. Que l'on se regarde dans une Glace, & que l'on y pose un fil qui aille depuis le point où l'on voit le haut du front jusqu'à celui où l'on voit le bas du menton, on trouvera que ce fil n'a que la moitié juste de la longueur du visage. Or il marque précisément la grandeur dont est l'Image prise sur la Glace, donc elle n'y est que la moitié de l'Objet, & si elle est vûë égale à l'Objet ou une fois plus grande que sur la Glace, c'est qu'elle est vûë & rapportée une fois plus loin que la Glace, ou, ce qui revient au même, à une distance de la Glace égale à celle de l'Objet. On pourroit donc prendre pour principe, & M. *Carré* le démontre geometriquement, que la grandeur de l'Objet & celle de l'Image sont entre elles comme leurs distances au Miroir. On entend ici que ces grandeurs ne soient prises que pour des lignes, car si on les prenoit pour des surfaces, il est évident qu'elles seroient comme les quarrés des distances.

Cela posé, nous avons les grandeurs de l'Image tant dans les Miroirs concaves, que dans les convexes, puisque nous avons ses distances au Miroir comparées à celles de l'Objet. Par exemple, le premier chemin que nous avons fait faire à un Objet placé devant un Miroir concave étant 0, 1, 2, &c. jusqu'à 10, & celui de l'Image au-delà du

Miroir étant o, 1 $\frac{1}{9}$, 2 $\frac{1}{2}$, &c. jusqu'à l'Infini, les rapports de o à o, de 1 à 1 $\frac{1}{9}$, de 2 à 2 $\frac{1}{2}$, &c. qui sont ceux des distances, seront aussi ceux des grandeurs de l'Objet & de l'Image. Or on trouvera par un calcul très-aisé que ces rapports sont $\frac{10}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{8}{10}$, &c. jusqu'à $\frac{1}{10}$, de sorte que le dénominateur étant toûjours 10, les numerateurs suivront la progression des nombres naturels, d'où il suit que la grandeur de l'Objet sera d'abord à celle de l'Image comme 10 à 10, c'est-à-dire égale, ensuite comme 9 à 10, &c. enfin comme 1 à 10, ou ce qui est la même chose, que l'Objet étant pris pour 1 la grandeur de l'Image sera 1, 2, 3, &c. jusqu'à 10, après quoi elle sera infinie. Cette augmentation de l'Image, remarquable par son extrême simplicité, l'est encore davantage en ce qu'elle suit, non les distances de l'Image même dans le Miroir, mais celle de l'Objet hors du Miroir, qui sont aussi 1, 2, 3, &c. Ce qui a été dit ci-dessus fait assez entendre que l'augmentation finie de l'Image n'est bornée à 10, que quand on fait passer l'Objet immediatement de 9 sur 10, mais que si on le fait passer par toutes les divisions infinies dont cet intervalle fini est capable, l'Image augmentera au dessus de 10 selon une infinité de nombres differents. Cela explique en même temps les diminutions de l'Image dans les Miroirs concaves, puisqu'elles ne sont que cette même augmentation renversée.

Dans les Miroirs convexes, où l'Image est toûjours plus petite que l'Objet, à moins qu'il ne soit au sommet du Miroir, elle a les mêmes diminutions que dans les Miroirs con-

concaves. Elle eſt infiniment petite quand elle eſt au quart du diametre, l'Objet étant alors infiniment éloigné, mais comme il ne peut l'être réellement, une Image infiniment petite n'exiſte point. Seulement on peut prendre pour telle phyſiquement celle du Soleil dans un Miroir convexe, auſſi n'y eſt-elle qu'un point. Il ſembleroit au contraire qu'une Image infiniment grande devroit exiſter, parce qu'elle depend d'une poſition de l'Objet très-poſſible, mais ſa grandeur infinie la rend auſſi infiniment confuſe, & fait qu'elle n'eſt plus une Image. La Nature n'eſt pas obligée à executer réellement toutes les idées abſtraites de la Geometrie.



DIOPTRIQUE.

SUR LES REFRACTIONS D'UNE ESPECE DE TALC.

* SI l'on vouloit donner aux Philoſophes une grande défiance des principes qu'ils reçoivent le plus généralement, l'exemple du Cryſtal d'*Iſlande* y ſeroit fort propre. Après avoir bien connu les Refractions qui ſe font dans l'Eau & dans le Verre, ils étoient en droit de croire que celles de tous les autres corps tranſparents, étoient en général de la mê-

* V. les M. p. 454.

même nature, & ne differoient que par les differentes proportions des Sinus d'incidence & de refraction, dépendantes de la differente densité des corps. Cependant en 1670 parut pour la premiere fois à leur grand étonnement dans un Livre d'*Erasme Bartholin* savant *Danois*, le Crystal d'*Islande*, qui renversoit les Regles établies, ou plutôt en faisoit naître de nouvelles, tout à fait imprévûës.

Ce Crystal est toûjours naturellement formé en parallelepipede non rectangle, & par conséquent ses 6 faces sont des parallelogrammes non rectangles aussi. M. *de la Hire* donne la mesure de tous ses angles aigus & obtus, plans & solides, ce qu'il est assez difficile de déterminer avec précision. Ce Crystal est plus proprement un Talc, puisqu'il se fend aisément en tout sens, mais toûjours parallelement à quelqu'une de ses 6 faces. Delà il suit que tous les fragmens de cette Pierre sont des parallelepipedes, qui ont les mêmes angles qu'avoit la Pierre entiere, & semblablement posez.

Un Rayon qui tombe sur une surface de ce Talc, s'y partage en deux, ce qui fait paroître doubles les Objets qu'on regarde au travers, sur-tout ceux qui sont tout contre. Les deux nouveaux rayons formés du premier ont chacun une refraction differente. Dans l'Eau & dans le Verre, l'angle d'incidence, d'où dépend celui de refraction, se prend par rapport à une perpendiculaire tirée sur la surface du Diaphane au point où le rayon tombe. Ici, il faut considerer pour le même rayon deux angles d'incidence, l'un qui se prend, comme nous venons de le dire, par rapport à une

une perpendiculaire, l'autre par rapport à une autre ligne assez inclinée à la même surface du Crystal. A ces deux angles d'incidence répondent deux refractions. La premiere peut être nommée *reguliere*, la seconde *irreguliere*. Elles different non-seulement en ce qu'elles dépendent de deux differens angles d'incidence, mais encore en ce que les Sinus de leurs angles d'incidence & de refraction suivent differentes proportions. Dans la reguliere, ils sont comme 5 à 3, dans l'irreguliere, comme $4\frac{1}{2}$ à 3, or $\frac{5}{3}$ étant plus grand que $\frac{3}{2}$ qui est la refraction du Verre, & $4\frac{1}{2}$ à 3, ou $\frac{9}{6}$ étant égal à $\frac{3}{2}$, la refraction reguliere du Crystal d'*Islande*, quoique ce soit une pierre fort tendre, est plus grande que celle du Verre, & l'irreguliere lui est égale.

Puisqu'une certaine ligne inclinée à la surface du Crystal regle l'angle d'incidence dans la refraction irreguliere, il est naturel qu'un rayon qui tombera selon la direction de cette ligne n'ait point de refraction irreguliere, & passe tout droit à cet égard, mais souffre seulement la refraction reguliere. C'est aussi ce qui arrive, car il est dans le même cas où est le rayon perpendiculaire dans la refraction ordinaire & commune. Et puisque les deux refractions sont inégales, il faut que la plus forte éleve davantage l'Objet, & c'est effectivement ce que fait la reguliere. M. *de la Hire* a déterminé par des observations fort délicates quelle est & la ligne qui regle la refraction irreguliere, & celle où se voïent les deux Images d'un même objet.

Le Crystal d'*Islande* a encore d'autres phenomenes singuliers. Quand les rayons tombent

bent d'un certain ſens, ils ſortent par la refraction du plan perpendiculaire où ils étoient en tombant, & s'en détournent à droite ou à gauche, ce qui n'arrive jamais dans les refractions communes. Si l'on met deux morceaux de ce Cryſtal l'un ſur l'autre, ſeparés ou non par quelque intervalle, on voit ſelon la maniere dont ils ſont poſez que tantôt les deux rayons venus d'un ſeul ſe repartagent chacun en deux en paſſant du cryſtal ſuperieur dans l'inferieur, tantôt ils ne ſe repartagent point, mais que dans ce ſecond cas quelquefois chacun fait dans le cryſtal inferieur la même refraction qu'il a déja faite dans le ſuperieur, quelquefois ils échangent leurs refractions enſemble. On diroit que la Nature a eu peur que cette pierre tranſparente ne fût pas une Enigme aſſez inexplicable pour les Phyſiciens, & qu'elle l'a chargée à plaiſir d'obſcurités, & de difficultés.

Cependant M. *Huygens* entreprit de penetrer ce myſtere, du moins en partie, dans ſon Traité *de la Lumiere* imprimé en 1690. Il ſuppoſe que la Lumiere ſe répand par ondes comme le Son, ce que nous n'expliquerons pas ici plus en détail. Il prétend qu'un Corps peut être tranſparent en deux manieres, ou parce que les intervalles que laiſſent entre elles ſes parties ſont remplies de matiere étherée dans laquelle les ondes *lumineuſes* ſe continuent, ou parce que ſes parties ſolides étant dures & à reſſort, elles prennent elles-mêmes le mouvement d'ondulation, auſſi-bien que la matiere étherée. De laquelle de ces deux manieres qu'un Corps ſoit tranſparent, il eſt aiſé de concevoir que l'ondulation en paſſant de

de l'air dans ce Corps doit ſe rallentir, ce qui rend le Sinus de refraction plus petit que celui d'incidence; mais ſi le Corps eſt tranſparent de la ſeconde maniere, l'ondulation doit ſe rallentir plus que s'il l'étoit de l'autre, & rendre le Sinus de refraction plus petit par rapport à celui d'incidence; la raiſon en eſt aſſez viſible.

Si un Corps étoit tranſparent des deux manieres tout à la fois, il s'y feroit donc auſſi tout à la fois deux refractions differentes du même rayon, & le même Objet y ſeroit vû double, & c'eſt ce que M. *Huygens* avoit obſervé avec ſoin dans le Cryſtal commun, qui par-là ne peut ſervir aux Lunettes d'approche, auſquelles il ſeroit d'ailleurs ſi propre par la netteté de ſa tranſparence.

Cette double émanation d'Ondes obſervée dans le Cryſtal commun étoit déja un degré pour arriver à un Syſtême ſur le Cryſtal d'*Iſlande*. Mais les deux Ondulations du Cryſtal commun ne pouvoient être que circulaires, l'une ſeulement un peu plus lente que l'autre, ce qui produiſoit deux refractions differentes à la verité, mais regulieres toutes deux. Il falloit pour l'irreguliere du Cryſtal d'*Iſlande* quelque choſe de nouveau & de plus ſingulier, & M. *Huygens* s'aviſa de la faire dépendre d'Ondes elliptiques, differentes par leur eſpece & par leur nature des Ondes circulaires, d'où la refraction reguliere dépendoit. Cette idée réüſſit à ſon Inventeur ſur une grande partie des phenomenes.

Il n'étoit pas moins difficile de juſtifier cette heureuſe ſuppoſition, qu'il l'avoit été de l'imaginer. Sans doute il n'y a que la figure

&

& l'arrangement des parties insensibles du Cryſtal d'*Iſlande*, qui puiſſe déterminer les ondulations naturellement circulaires à ſe changer en elliptiques, mais comment aller juſqu'à une recherche ſi délicate? Il nous ſuffit preſentement que l'on entrevoye que, les Ondes ſuppoſées, le tiſſu interieur du corps diaphane en peut changer l'eſpece, ou qu'enfin dans tout autre Syſtême de la Lumiere il peut produire des refractions fort differentes de la commune.

Auſſi dans une autre eſpece de Talc, qu'on trouve auprès de *Paris* au-deſſus des bancs de pierre de Plâtre, & qui a quelque rapport à celui d'*Iſlande*, M. *de la Hire* a-t-il cherché fort curieuſement en l'obſervant quelle pouvoit être la figure & la diſpoſition de ſes parties *élementaires*. Il a trouvé que chacune des lames qui le compoſent étoit un aſſemblage de petits triangles, dont les angles ſont toûjours de 50, 60 & 70 degrés, particularité fort ſinguliere. Il ſeroit inutile que nous fiſſions une plus ample deſcription de cette Pierre, après celle que M. *de la Hire* en a faite.

De quelque ſens qu'on la prenne, ſes refractions ſont $\frac{10}{7}$, ce qui eſt à fort peu près $\frac{3}{2}$, refraction du Verre, & refraction irreguliere du Cryſtal d'*Iſlande*. L'Objet n'y eſt doublé qu'imparfaitement, & ce n'eſt même que quand on le poſe ſur de certaines fentes ou fêlures qui ſont aux côtés.

M. *de la Hire* promet l'explication de ces phenomenes auſſi-bien que de ceux du Cryſtal d'*Iſlande*. Il ne ſeroit peut-être pas aiſé de décider laquelle de ces deux eſpeces de Talc doit mener à la connoiſſance de l'autre. Il eſt

est vrai que celui d'*Islande* est de beaucoup le plus compliqué, mais sa double refraction aussi sensible & aussi bien marquée qu'elle est doit être un grand principe pour tout ce qu'il y aura d'approchant dans les autres Diaphanes. Quelquefois un sujet plus composé expose dans une plus grande étenduë, & met mieux au jour ce que le simple envelopoit, & cachoit dans sa simplicité même.



MECHANIQUE.

SUR LA RESISTANCE DES SOLIDES.

* LA Theorie de M. *Parent* sur la Résistance des Poutres exposée dans l'Hist. de 1708 † cesse d'être aussi particuliere qu'elle étoit, & s'éleve presentement à cette universalité dont toute la Geometrie moderne se pique. Il s'agit donc maintenant de la Résistance des Solides en général, matiere déja traitée à fond par M. *Varignon* ‡, mais qui ne laissera pas de prendre une face nouvelle.

Nous avons prouvé en 1708 d'après M. *Parent* que dans une Poutre posée horizontalement & retenuë fixement par un bout, la résistance de sa base à être rompuë, & par consequent la résistance totale de la Poutre, est le produit du quarré de la hauteur de cette base

* V. les M. p. 235. † p. 141. & suiv.
‡ V. l'Hist. de 1702. p. 135. & suiv.

base par sa longueur. Cette idée n'est pas bornée aux Poutres seules, car si l'on considere dans un Solide quelconque sa résistance à être rompu dans toutes les *tranches* paralleles à la base, qui sont elles-mêmes comme autant de bases, il est visible que cette résistance sera exprimée en général & indéterminément par le même produit, pourvû que toutes ces tranches soient semblables entre elles, comme le seront, par exemple, toutes celles d'un Cône ou d'un Conoïde, ou du moins qu'elles soient proportionnelles, c'est-à-dire que l'axe particulier de chaque tranche étant divisé en un nombre égal de parties égales, les Ordonnées correspondantes soient en même raison. Ainsi si un Solide étoit tel & tellement posé que son plan vertical fût le plan d'une certaine Courbe, & son plan horizontal celui d'une autre, & que toutes deux eussent pour axe commun sa longueur horizontale, la hauteur d'une de ses bases quelconques seroit une Ordonnée de la 1ere Courbe, la largeur l'Ordonnée correspondante de la 2de, & sa résistance indéterminée, le produit du quarré de la 1ere Ordonnée par la 2de. Il paroît d'abord que si l'on change ce même Solide de position, & que son plan vertical devienne l'horizontal, sa résistance changera, comme nous l'avons dit d'une Poutre quadrangulaire posée sur le chan, ou sur le plat, & cela par la même raison. Mais il n'y aura nul changement, si deux plans du Solide appartiennent à la même Courbe, ou, ce qui revient au même, s'il est formé par une révolution circulaire d'une Courbe autour de son axe, ce qu'on peut appeller en général un *Conoïde*.

La

La réſiſtance du Solide étant trouvée, il faut trouver auſſi la puiſſance qui agit contre elle. C'eſt ou le poids même du Solide, ou un poids étranger, l'un & l'autre agiſſant par un bras de levier d'une certaine longueur, ou, geometriquement parlant, multiplié par ce bras.

Ces deux produits, dont l'un exprime l'action du poids qui tend à rompre le Solide, & l'autre ſa réſiſtance à être rompu, ont un certain rapport. Si la figure du Corps eſt telle que ce rapport y ſoit toûjours le même dans toutes ſes parties, elles ſeront toutes également tirées, & également tenduës par le poids, & ſi le Corps rompt, toutes ſes baſes qui ſont en nombre infini doivent ſe ſéparer les unes des autres en même temps, ce qui n'eſt qu'une idée geometrique ou metaphyſique, car réellement & phyſiquement il y aura toûjours quelque baſe plus foible où ſe fera la fraction. On dit que ce Corps eſt *d'égale réſiſtance*. Mais ſi le rapport des deux produits eſt tel en quelque endroit que l'action du poids y ſurpaſſe la réſiſtance plus que partout ailleurs, le Corps y rompra, & ce ſera dans cette baſe ſeule que ſe fera la ſéparation. Dans le premier cas le rapport des deux produits eſt donc toûjours égal à une quantité conſtante, dans le ſecond il devient *un plus grand*, & ce plus grand ſe trouve par les Methodes ordinaires. Comme il eſt poſſible que dans une Courbe il y ait pluſieurs *plus grands*, de même il peut y avoir dans un même Solide pluſieurs endroits où il rompe par le même poids, ou pluſieurs baſes de fraction.

Il n'y a de difficulté qu'à exprimer le produit

duit qui repreſente l'action du poids, & voici d'où elle vient. Si un Solide arrêté par un bout dans un Mur, & tiré ſeulement par ſon propre poids, rompoit toûjours, comme un Cylindre, par ſon bout arrêté, le produit dont il s'agit ſeroit toûjours le poids de ce Corps multiplié par la diſtance de ſon centre de gravité au Mur où eſt la baſe de fraction. Mais le Solide peut aiſément être de telle figure qu'il rompra par un autre endroit, par exemple, à la baſe qui ſera au tiers de ſon axe à compter depuis le Mur. Alors ce ſont ſeulement les deux tiers de ce Corps pris ſur ſon axe qui ont agi, c'eſt-à-dire le poids de ces deux tiers multiplié par la diſtance de leur centre de gravité à la baſe de fraction. Le poids de la partie *agiſſante* & ſon levier varient donc ſelon la figure des Corps, & il faut les traiter dans le calcul comme des quantités variables.

En effet lorſqu'un Solide n'eſt tiré que par ſon propre poids, il en faut conſiderer chaque baſe infiniment peu épaiſſe comme un poids qui le tire, or dans la Theorie générale toutes ces baſes ſont inégales entre elles, puiſqu'elles ſont formées par des Ordonnées de Courbes, & par conſequent M. *Parent* conſidere un Corps tiré par ſon propre poids, comme s'il l'étoit par des puiſſances variables. Ce poids ſeroit une puiſſance conſtante ſi l'on ſavoit en quel endroit ce Corps doit rompre, car ce ſeroit le poids de la partie agiſſante, mais c'eſt ce qu'on ne ſait pas, & ce qui varie ſelon les figures.

De même ſi un Solide, par exemple, une Pyramide ou un Cône, eſt expoſé à l'action du

du Vent, le Vent eſt une puiſſance variable, parcequ'il fait d'autant plus d'impreſſion ſur les parties inégales de la ſurface de ce Corps, qu'elles ſont plus grandes.

Enfin dans la Theorie générale un Corps n'eſt proprement tiré par une puiſſance conſtante, que quand on fait abſtraction de ſon propre poids, & qu'on lui attache un poids étranger connu. Si on vouloit conſiderer les deux poids, ce ſeroit un mêlange d'une puiſſance conſtante, & d'une variable.

Dans l'hypotheſe d'un Corps ſans peſanteur tiré par un poids étranger, il peut arriver que le Corps n'ait aucune baſe de fraction. Car ſi l'on conçoit le poids attaché juſtement à la baſe qui par elle-même eſt la moins réſiſtante, il n'aura aucun levier à ſon égard, & par conſéquent aucune action contre elle, & il peut d'ailleurs être tellement placé qu'il n'ait qu'un trop petit levier à l'égard des autres qui ſont plus réſiſtantes. Ainſi ce poids qui étoit capable de rompre le Corps, s'il eût été autrement placé, ne le rompra point. Ce ſeroit la même choſe, ſi le poids n'avoit qu'un trop petit levier à l'égard de la baſe la moins réſiſtante, & enſuite à l'égard des autres. Ce cas n'a point de lieu pour les Corps tirés ſeulement par leur propre poids, parceque ce poids qu'on ſuppoſe aſſez grand pour les rompre ne peut être placé ailleurs que dans le centre de gravité ſoit du tout, ſoit de la partie agiſſante.

Toutes ces idées ſuppoſées, M. *Parent* arrive par le calcul à deux Theorêmes fort remarquables. 1°. Un Corps tiré par une puiſſance variable eſt d'égale réſiſtance, ſi les

infiniment petits d'infiniment petits ou les differences secondes des résistances de ses bases sont par tout en même raison que les puissances rompantes appliquées à ces bases, c'est-à-dire en même raison que ces bases mêmes, lorsque le Corps n'est tiré que par son propre poids. 2°. Si le Corps rompt en quelque endroit, qui est par consequent sa base de fraction, le levier par lequel la puissance ou les puissances rompantes ont agi est égal au produit des deux Soûtangentes de la hauteur & de la largeur de cette base de fraction, divisé par la Soûtangente de la hauteur, plus deux fois la Soûtangente de la largeur.

Il suit du 1er Theorême qu'il y a une infinité de Corps d'égale résistance, quoiqu'on n'en ait jusqu'ici découvert qu'un assez petit nombre. Car si un Corps est terminé d'un côté par un plan vertical d'une Courbe, & de l'autre par un plan horizontal d'une autre Courbe, toutes deux encore indéterminées, il est clair que dès qu'on en aura déterminé l'une à être, par exemple, une Parabole, l'autre se déterminera necessairement ensuite par la proprieté essentielle qui apartient à l'égale résistance. Or la premiere détermination étant entierement libre, il naîtra une infinité de figures differentes. Si le Corps étoit un Conoïde, cette reflexion n'auroit point de lieu, parcequ'il ne seroit formé que d'une seule Courbe.

Il suit du 2d Theorême que si un Corps est de telle figure que la quantité tirée des Soûtangentes de chaque base soit toûjours égale au levier par lequel les puissances rompantes ont dû agir à l'égard de cette base, ce Corps est

eſt d'égale réſiſtance, puiſque, s'il rompt, il doit rompre également par tout. Hors delà, il peut avoir une baſe de fraction.

C'eſt cette baſe qu'il s'agit maintenant de déterminer, & qui donne lieu à pluſieurs conſiderations ſelon les differentes circonſtances. M. *Parent* n'enviſage ici que les plus ſimples, d'où il paſſera aux autres. Il ſuppoſe les Solides ſans peſanteur, tirés ſeulement par un poids conſtant attaché à leur ſommet, de ſorte que le levier de ce poids eſt toûjours la diſtance du ſommet à la baſe de fraction. Cette diſtance indéterminée & inconnuë devant être toûjours égale à la quantité tirée des Soûtangentes de la baſe de fraction, elle deviendra déterminée & connuë par les grandeurs conſtantes & connuës de l'expreſſion des Soûtangentes.

Si un corps eſt un Conoïde, les deux Soûtangentes d'une baſe quelconque étant toûjours égales, il ſaute aux yeux que la quantité tirée des Soûtangentes ſera toûjours le tiers d'une Soûtangente quelconque. Si le levier indéterminé, par lequel agit le poids attaché au ſommet, eſt toûjours le tiers de la Soûtangente de chaque baſe, ce Conoïde eſt viſiblement d'égale réſiſtance. Tel eſt celui qui eſt formé par la révolution d'une 1ere Parabole Cubique autour de ſon axe, car dans cette Courbe une Abſciſſe quelconque eſt toûjours le tiers de la Soûtangente correſpondante, or le levier indéterminé du poids attaché au ſommet eſt une Abſciſſe. Si le Conoïde étoit formé par la révolution d'une Parabole ordinaire autour de ſon axe, comme dans cette Parabole une Abſciſſe quelcon-

conque eſt toûjours la moitié de la Soûtangente correſpondante, on trouveroit que le levier indéterminé du poids devroit être égal aux deux tiers de lui-même, ce qui eſt abſurde, & par conſéquent ce Conoïde n'a point de baſe de fraction, le poids étant placé comme il l'eſt. Il faudra afin que quelque autre Conoïde en ait une, qu'il ait quelque Soûtangente triple de ſon Abſciſſe.

Si l'on conſidere des Corps qui ne ſoient point des Conoïdes, mais dont une face ſoit un parallelogramme, & les autres formées par des Courbes, à peu près comme ſont les Conſoles, il faut obſerver que les Ordonnées des Parallelogrammes ſont des lignes toutes égales, dont les Soûtangentes ſont infinies, ou les côtés mêmes des parallelogrammes prolongés à l'infini. Ainſi dans la quantité tirée des deux Soûtangentes, il y a une Soûtangente qui devient infinie, & qui aneantit l'autre. Si le Corps eſt tellement poſé que ce ſoit la Soûtangente de la largeur de ſa baſe qui devienne infinie, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi ſa face qui eſt un parallelogramme eſt horizontale, auquel cas le corps eſt poſé de chan, la quantité tirée des Soûtangentes ſera la moitié de la Soûtangente de la hauteur, & un Corps où cette moitié ſera toûjours égale à l'Abſciſſe, ſera d'égale réſiſtance étant poſé de chan, & tiré par un poids attaché à ſon ſommet; telle ſeroit une eſpece de Conſole dont les deux plans verticaux ſeroient des Paraboles ordinaires. Si ce même Corps eſt poſé ſur le plat, auquel cas ſa face qui eſt un parallelogramme eſt verticale, & la Soûtangente de ſa hauteur eſt infinie, la

quan-

quantité tirée des Soûtangentes n'est que la Soûtangente même de sa largeur. Or ce n'est que dans un Triangle dont on considerera toutes les bases paralleles comme autant d'Ordonnées, que l'on peut trouver des Soûtangentes toûjours égales à leurs Abscisses, & delà il est aisé de former la figure du Corps qui posé sur le plat & tiré à son sommet par un poids sera par tout d'égale résistance. Toutes ses faces ne seront que des triangles & des parallelogrammes.

Si au lieu de supposer toûjours un Corps sans pesanteur, & de lui attacher un poids à son sommet, on le considere comme devant rompre par son propre poids, qui est une puissance variable, il est aisé de voir par ce qui a été dit que le levier indéterminé ne sera plus une Abscisse, mais seulement la distance du centre de gravité de la partie agissante à la base de fraction, & il faudra que cette distance soit égale en quelque endroit ou en plusieurs à la quantité tirée des Soûtangentes, s'il doit rompre en un endroit seulement ou en plusieurs, ou égale par tout, s'il doit rompre également par tout ou être d'égale résistance. Pour cette recherche, il faut avoir par les Methodes ordinaires les Centres de gravité du Corps & de ses portions quelconques.

C'est la même chose si un Corps est exposé à l'action du Vent, ou de quelque autre puissance variable, pourvû que l'on ait égard à la maniere dont cette action s'y applique. Lorsqu'elle varie comme les bases du Corps, elle ne fait que le même effet que sa propre pesanteur.

Toutes les fois que M. *Parent* trouve par

 son

son Theorême des Soûtangentes qu'un Corps est d'égale résistance à l'égard d'une puissance variable, il lui confirme cette proprieté par son 1er Theorême, c'est-à-dire qu'il fait voir que les differences secondes des résistances de ses bases sont par tout comme les puissances rompantes. Ainsi une Console posée sur le plat, ayant son plan horizontal superieur & l'inferieur formés par deux plans égaux de Logarithmique, & tirée seulement par sa propre pesanteur, sera par tout d'égale résistance ; car d'un côté les puissances rompantes qui sont les bases ne sont dans cette position que comme les largeurs de ces bases, ou comme les Ordonnées de la Logarithmique, puisque toutes les hauteurs qui apartiennent à un parallelogramme sont égales, & d'un autre côté les résistances des bases ne sont par la même raison que comme leurs largeurs ou les mêmes Ordonnées de Logarithmiques, dont par la proprieté essentielle de cette Courbe les differences 1eres, 2des, &c. à l'infini, sont comme les Ordonnées mêmes.

Nous n'entrerons point avec M. *Parent* dans un plus grand détail d'Exemples. Il suffira de remarquer qu'il en donne aussi quelques-uns de figures qui n'ayant par elles-mêmes aucune base de fraction pour un poids attaché à un certain point, en ont une à l'égard de ce même poids demeurant immobile, pourvû qu'on les augmente de quelque autres figure. Cet expedient revient au même que celui de déplacer le poids, mais il demande un autre calcul & d'autres tours geometriques. On se plaît presentement à multiplier les difficultés, on les recherche avec soin, tant on est sûr de l'Art qui les doit vaincre.

SUR



SUR LA RESISTANCE DES MILIEUX AU MOUVEMENT.

* DEs trois Hypotheſes les plus vrai-ſemblables qu'on puiſſe faire ſur la Réſiſtance des Milieux au Mouvement, & les ſeules que M. *Varignon* ait jugées dignes de les examiner, les deux premieres étant entierement finies †, il paſſe à la troiſiéme, c'eſt celle où la Réſiſtance croît comme la ſomme de la viteſſe & de ſon quarré. Tout le reſte demeure le même que dans les deux autres Hypotheſes.

Nous avions ſuppoſé dans la premiere que de la viteſſe du 1er inſtant qui étoit 1, la réſiſtance du Milieu en retranchoit la 10eme partie. Cette même ſuppoſition a ſubſiſté dans la ſeconde Hypotheſe, parce que ſoit que la réſiſtance croiſſe comme les viteſſes ou comme leurs quarrés, la viteſſe du 1er inſtant, & ſon quarré ſont également 1. Mais ce n'eſt plus la même choſe dans la troiſiéme Hypotheſe. La ſomme de la viteſſe du 1er inſtant & de ſon quarré eſt 2, & par conſequent ſi dans les 2 premieres Hypotheſes la réſiſtance qui ſuivoit ou les viteſſes ou leurs quarrés a retranché $\frac{1}{10}$ de la viteſſe du 1er inſtant, maintenant qu'elle ſuit les ſommes des viteſſes & de

* V. les M. p. 324 & 641.

† V. l'Hiſt. de 1707. p. 174 & ſuiv. celle de 1708. p. 151. & ſuiv. & celle de 1709. p. 122. & ſuiv.

leurs quarrés, & que par-là elle est dans le 1er instant double de ce qu'elle étoit, elle doit retrancher $\frac{1}{5}$ de la vitesse de cet instant. Cette vitesse qui de 1 ou $\frac{10}{10}$ devenoit $\frac{9}{10}$ devient donc $\frac{8}{10}$, ou $\frac{4}{5}$.

Sur ce pié-là, pour avoir la vitesse du 2d instant, il ne faut que faire le même raisonnement qui a été fait pour la seconde Hypothese dans l'Hist. de 1709 *. La vitesse primitive du 2d instant, qui, si le Milieu ne résistoit plus, seroit $\frac{4}{5}$ plus 1 ou $\frac{9}{5}$, perdra une partie qui sera à $\frac{1}{5}$, comme la somme de la vitesse $\frac{9}{5}$ & de son quarré, est à la somme de la vitesse 1 & de son quarré ou à 2. Cette partie sera donc $\frac{63}{125}$, qui étant retranchée de la vitesse primitive du 2d instant $\frac{9}{5}$ ou $\frac{225}{125}$ la réduit à n'être plus que $\frac{162}{125}$, de sorte que les vitesses des deux premiers instants, qui sans la résistance auroient été 1 & 2, ne seront plus que $\frac{4}{5}$ & 1 $\frac{37}{125}$. Et si on multiplie par 1000 afin de les pouvoir comparer aux mêmes vitesses qui ont été calculées pour les deux premieres Hypotheses, on trouvera que les vitesses primitives qui étoient 1000 & 2000, deviennent dans la 1ere Hypothese 900 & 1710, dans la 2de 900 & 1539, & dans la 3eme 800, & 1296.

La vitesse va donc toûjours en diminuant d'une Hypothese à l'autre, & si dans les deux premieres elle ne devenoit au bout d'un temps infini qu'une vitesse términale finie, elle doit à plus forte raison le devenir dans cette troisiéme Hypothese, & même être moindre.

Dans la 1ere, la Résistance que fait le Milieu en quelque instant que ce soit est à la Pe-

* p. 124.

Pesanteur du Corps qui tombe, comme la vitesse actuelle qu'il a en ce même instant, est à la vitesse terminale qu'il aura au bout d'un temps infini. Delà nous avons conclu que pour la 2de Hypothese il n'y avoit qu'à faire dans cette proportion le changement que demande naturellement & necessairement le changement d'Hypothese, & que la Résistance seroit à la Pesanteur comme le quarré de la vitesse actuelle au quarré de la terminale. Il est donc naturel de conclure que pour la 3eme Hypothese, il n'y a qu'à mettre dans la même proportion au lieu des quarrés des vitesses, les sommes de leurs quarrés & d'elles, & cela est effectivement vrai, quoiqu'avec une certaine modification.

Il s'agit dans toute cette Théorie générale de trouver des Courbes par le moyen desquelles des lignes ou des surfaces représentent les grandeurs qu'on veut connoître, vitesses, résistances, espaces parcourus. Il faut donc suivre les loix que la Geometrie observe necessairement en considerant differentes grandeurs. Ici la résistance se proportionne toujours à la somme faite de la vitesse actuelle & de son quarré, mais en Geometrie on ne sauroit faire une somme d'une grandeur & de son quarré, d'une ligne & d'une surface, parceque ces deux grandeurs ne peuvent être comparées, & que l'une n'est que l'élement infiniment petit de l'autre. Il faut donc, si l'on veut les comparer, les réduire à l'*homogeneité*, & les rendre de même espece en divisant le quarré par quelque grandeur arbitraire, moyennant quoi le quotient de cette division n'est qu'une ligne, grandeur de même espece

que la racine du quarré, & l'on fait fort naturellement une somme de cette racine, & de la nouvelle ligne. Afin que ces nouvelles lignes qui naissent de la division des quarrés soient toûjours en même raison qu'eux, la division se fait toûjours par une même grandeur constante, & entant qu'il n'est question que de rapports, il n'y a rien de changé.

Mais il arrive du changement à l'égard des grandeurs *absoluës*. Plus la grandeur arbitraire & constante par laquelle se font les divisions est grande, plus les quotients sont petits, & réciproquement. Or dans l'hypothese presente la résistance d'un instant quelconque s'exprime par la vitesse de cet instant, plus son quarré divisé par la grandeur constante, donc plus cette grandeur est grande, plus les résistances sont petites en elles-mêmes, quoique toûjours proportionées aux sommes des vitesses & de leurs quarrés, & réciproquement. Mais d'un autre côté, la résistance d'un instant quelconque est toûjours à la Pesanteur constante du Corps, comme la somme faite de la vitesse actuelle de cet instant & de son quarré, est à une pareille somme faite de la vitesse terminale. Donc si les résistances sont plus petites en elles-mêmes & par conséquent aussi par rapport à la pesanteur, les vitesses actuelles seront aussi plus petites par rapport à la Terminale, ou, ce qui est la même chose, la Terminale sera plus grande. Donc la grandeur de la Terminale dépend de cette grandeur arbitraire & constante par laquelle on divise les quarrés; & en effet M. *Varignon* trouve que la Terminale est toûjours un peu plus de la moitié de cette grandeur. Il

Il peut paroître étrange que la Terminale ſoit dépendante d'un choix arbitraire, car n'a-t-elle pas par elle-même ſa grandeur déterminée? Qu'un Corps tombe librement dans l'air, & que l'air lui réſiſte ſelon l'hypotheſe preſente, ce Corps n'acquerra-t-il pas au bout d'un temps infini une certaine viteſſe, neceſſairement reglée par les cauſes phyſiques, & qui ſeroit toûjours la même dans toute autre chute égale? Cela eſt vrai, mais cette viteſſe Terminale n'eſt pas connuë. Si on la connoiſſoit, on en prendroit un peu moins que le double pour faire la diviſion des quarrés, & tout ſeroit fixe & déterminé. Mais à ſon défaut, on prend une grandeur arbitraire & conſtante qui tient ſa place, & fait le même effet à l'égard des ſimples rapports, mais qui ſelon qu'elle eſt priſe plus ou moins grande fait varier les grandeurs abſoluës.

Dans la proportion dont les 4 termes ſont la réſiſtance, la peſanteur, la ſomme faite d'une viteſſe quelconque & de ſon quarré, & une pareille ſomme de la viteſſe Terminale, la neceſſité de diviſer les quarrés par une grandeur conſtante y fait entrer dès le 3ème terme cette grandeur d'où dépend la Terminale, ainſi cette Terminale inconnuë ne peut être trouvée par les 3 premiers termes, comme elle l'a été dans les deux hypotheſes précedentes. On ne peut que la ſuppoſer.

Après cet éclairciſſement ſur la nouvelle eſpece dont eſt ici la Terminale, il ne nous reſte plus de reflexions importantes à faire ſur les deux Courbes qui repreſentent où les viteſſes *actuelles* & qui reſtent au Corps malgré la réſiſtance du Milieu, ou les viteſſes *perduës*.

duës. M. *Varignon* les trouve toutes deux comme dans la seconde hypothese, d'abord par la Logarithmique, ensuite par l'Hyperbole.

L'espace parcouru dans cette troisiéme hypothese est aussi-bien que dans les deux autres infini en un temps infini, mais il arrive ici une chose particuliere; c'est que quand on se sert de l'Hyperbole pour la construction de la Courbe qui doit representer par ses aires curvilignes les espaces parcourus, on trouve que cet espace parcouru en un temps infini est infiniment infini, ou infini du 2d genre. Or que veut dire cela? pourquoi cet espace de l'ordre du fini où il étoit *saute-t-il* dans l'infini du 2d genre? & peut-il y sauter sans avoir passé par l'infini du 1er? Pour répondre à ces difficultés M. *Varignon* fait une digression, dont nous donnerons les principes, en y ajoûtant quelques reflexions.

Si l'on considere une progression geometrique quelconque, comme 1, 2, 4, &c. il est certain que chacun des intervalles égaux qui sont entre 1 & 2, entre 2 & 4, &c. peut être rempli par une infinité de nombres irrationels, qui entreront dans la même progression geometrique. Par exemple, entre 1 & 2 est la Racine de 2, moyenne proportionelle geometrique entre 1 & 2; entre 1 & la Racine de 2, est la Racine 4eme de 2; entre 1 & la Racine 4eme de 2, est la Racine 8eme de 2, & toûjours ainsi en s'approchant de 1, de sorte que la derniere d'un nombre infini de ces racines irrationelles de 2 ne sera que 1. De même entre la Racine de 2 & 2, on trouvera un nombre infini de grandeurs irrationelles qui

qui s'approcheront toûjours de 2, & dont la derniere lui sera égale. Il n'y a point d'intervalle entre deux grandeurs, quelque petit qu'il soit, qui ne soit divisible à l'infini, c'est-à-dire qui ne puisse être rempli par une infinité de grandeurs *intermediaires*, qui entreront dans la progression des *extrêmes* ou *principales*.

Ces grandeurs intermediaires sont d'une autre nature que les principales, non en elles-mêmes, puisqu'elles entrent dans la même progression, mais par rapport à nous, qui ne les concevons pas aussi distinctement que les autres. Ainsi tous ces nombres irrationnels qui sont entre 1 & 2, sont fort obscurs pour l'esprit humain, & ce qui le prouve bien entre plusieurs autres choses, c'est que, comme dit M. *Varignon*, tous les nombres dont nous avons une idée nette, sont pairs ou impairs, cependant ceux-là ne sont ni l'un ni l'autre.

Si l'on imagine les differents Ordres d'Infini que je suppose démontrés à toute rigueur, le Fini, l'Infini du 1er genre, l'Infini du 2d &c. il est évident qu'ils font ensemble une progression geometrique croissante; mais dequoi sont remplis leurs intervalles? Le premier ne le peut être que d'une infinité de grandeurs moyennes proportionnelles entre le Fini, & l'Infini du 1er genre, & qui par consequent ne sont ni de l'un ni de l'autre ordre, ni finies, ni infinies, ce qui n'est pas plus incomprehensible, & est prouvé de la même maniere que les nombres irrationnels. Ces grandeurs intermediaires entre le Fini & l'Infini du 1er genre, qui sont les seules que nous conside-

rions ici, peuvent être appellées *Infinis imparfaits*..

Ces Infinis imparfaits ne laiſſent pas d'être infiniment grands par rapport au Fini dans le même temps qu'ils ſont infiniment petits par rapport à l'Infini du 1er genre. Ainſi l'eſſence de la Parabole conſiſtant en ce que ſon Parametre, grandeur conſtante & finie, une Ordonnée quelconque, & l'Abſciſſe correſpondante ſont toûjours en progreſſion geometrique, ſi l'on conçoit cette Courbe prolongée à l'infini, & par conſequent ſa derniere Ordonnée & ſon Abſciſſe ou l'Axe devenus infinis, il faut neceſſairement que cette Ordonnée ſoit un Infini imparfait, infiniment grand par rapport au Parametre, & infini petit par rapport à l'Axe devenu infini du 1er genre, car la proprieté eſſentielle d'une Courbe ſe conſerve juſque dans l'Infini, lorſque la Courbe y peut aller. Et il faut remarquer que ſans cette idée d'Infini imparfait, & dans la ſuppoſition des ſeuls Infinis parfaits, la Parabole prolongée à l'Infini, comme elle peut certainement l'être, renfermeroit une difficulté inexplicable. Il faudroit que l'Ordonnée fût un Infini du 1er genre, & l'Axe du 2d, or les Ordonnées & l'Axe ayant toûjours crû enſemble & de compagnie, il ſeroit inconcevable que l'Axe eût paſſé de l'ordre du Fini à l'Infini du 2d genre ſans paſſer par celui du 1er, tandis que l'Ordonnée n'auroit fait que le chemin *regulier* de l'ordre du Fini dans l'Infini du 1er genre.

Selon le Syſtême que nous établiſſons ici, il y a des Infinis imparfaits, qui quoiqu'ils ſoient toûjours infiniment plus grands que le

Fini,

Fini, s'en approchent pourtant toûjours de plus en plus. On peut trouver un exemple d'un Infini imparfait le moins au-dessus du Fini qu'il se puisse dans la Logarithmique, dont les Ordonnées séparées par des intervalles égaux infiniment petits sont en progression geometrique, & peuvent s'étendre sur l'Axe à l'infini. Car si l'on conçoit qu'elle arrive à une Ordonnée infinie du 1er genre, il est de sa nature qu'entre cette Ordonnée infinie, & la derniere des finies, il y en ait une infinité qui seront des moyennes proportionnelles du genre de l'Infini imparfait. Et si l'on conçoit que la Logarithmique se termine à la premiere Ordonnée infinie qu'elle peut avoir, car à quoi serviroit-il de la pousser au-delà? cette premiere Ordonnée sera la premiere de ces moyennes proportionnelles, moins differente que toute autre de la derniere Ordonnée finie.

Comme toutes les Courbes cheminent par les degrés les plus insensibles qu'il se puisse, on peut de même imaginer, lorsqu'elles arrivent à l'Infini, que c'est à quelque Infini imparfait, à moins qu'il ne soit necessaire de l'imaginer parfait, ainsi que l'Axe de la Parabole devenuë infinie. Le Calcul ne détermine pas necessairement & par lui-même la differente espece de l'Infini parfait & de l'imparfait, car ils n'ont tous deux à cet égard qu'un caractere commun, qui est que toute grandeur finie disparoît devant eux.

Toutes ces idées & ces raisonnemens sur l'Infini se transportent naturellement à l'Infiniment petit. Il y a entre le fini & l'infini-

ment

ment petit du 1er genre une infinité de moyennes proportionelles, toutes infiniment plus petites que le fini, & infiniment plus grandes que l'infiniment petit du 1er genre. Un exemple seul suffira pour prouver la necessité de les admettre.

On connoît plusieurs Courbes qui n'ayant qu'un axe fini qu'elles rencontrent à leur origine, ont sur cet axe une derniere Ordonnée infinie, & asymptotique à la Courbe. Il est certain que cette derniere Ordonnée n'est que la somme de toutes les *differences* infiniment petites précedentes, mais comment peut-elle l'être? Il n'y a de differences infiniment petites précedentes qu'autant qu'il y a d'intervalles infiniment petits pris sur l'Axe entre les Ordonnées. Or l'Axe étant supposé fini, il ne peut avoir qu'un nombre de ces intervalles infini du 1er genre tout au plus. Donc le nombre des differences n'est non plus qu'un infini du 1er genre. Donc puisqu'elles sont infiniment petites, leur nombre infini ne peut faire qu'une somme, & par consequent une derniere Ordonnée finie; cependant elle est infinie. Il est évident que si l'Axe étoit infini, & que par consequent il contînt une infinité d'intervalles infiniment petits, cette difficulté n'auroit pas lieu.

Il ne paroît pas qu'on la puisse résoudre autrement qu'en concevant que les differences dont il s'agit sont des infiniment petits *imparfaits* plus petits, à la verité, que toute grandeur finie, mais infiniment plus grands que les infiniment petits du 1er genre, & qui par conséquent font une somme infiniment plus grande, ou infinie.

Après

Après cet éclairciſſement qui étoit important pour la Geometrie de l'Infini, & qui n'eſt pas le ſeul qu'elle demandât encore, M. *Varignon* reprend ſa matiere, & paſſe aux Mouvemens qui ayant commencé par une viteſſe finie quelconque, auroient été toûjours enſuite accelerés par la peſanteur, & auroient éprouvé de la part du Milieu la réſiſtance de la troiſiéme Hypotheſe. Cette viteſſe *initiale* ſeroit plus petite que la terminale, ou égale, ou plus grande, mais nous avons déja épuiſé dans les deux hypotheſes précedentes les raiſonnemens généraux que l'on peut faire ſur ces trois cas.

MOnſieur *Jaugeon* a donné un Ecrit de l'Origine des Caracteres Latins, composé à l'occaſion de la conſtruction des nouveaux Caracteres, à laquelle il a travaillé.



MACHINES OU INVENTIONS APPROUVE'ES PAR L'ACADEMIE DES SCIENCES EN MDCCX.

I.

UNe Machine inventée par M. *Olaine*, Gentilhomme *Irlandois*, pour mouler un très-grand nombre de Chandelles tout à la fois, & très-facilement. De plus le Suif qu'il employe à ces Chandelles eſt tellement pré-

préparé qu'elles brûlent fort bien sans couler, n'ont aucune mauvaise odeur, & sont presque aussi seches au toucher que de la Cire.

II.

Un Fauteuil mobile sur des Roulettes, que celui qui est assis dedans peut faire mouvoir seul dans une Chambre, & tourner du côté qu'il veut. Il a été presenté par le Sieur de *Bezu*, & a paru simple, & d'usage.



E L O G E

DE M. DE CHAZELLES.

JEAN MATHIEU DE CHAZELLES nâquit à *Lyon* le 24 Juillet 1657. d'une Famille honnête, qui étoit dans le Commerce. Il fit toutes ses études dans le grand College des Jesuites de cette Ville, après quoi il vint à *Paris* en 1675. La passion qu'il avoit d'y connoître les gens de merite le conduisit chez feu M. *du Hamel*, Secretaire de cette Academie, qui de son côté favorisoit de tout son pouvoir les jeunes gens, dont on pouvoit concevoir quelque esperance. Il remarqua dans celui-ci beaucoup de disposition pour l'Astronomie, car le jeune homme étoit déja Géometre, il le presenta à M. *Cassini*, qui le prit avec lui à l'Observatoire, École où *Hipparque* & *Ptolomée* eux-mêmes auroient encore pû apprendre.

La Theorie & la Pratique, toûjours si differentes, le sont peut-être plus en fait d'Astronomie qu'en toute autre matiere, & le

le plus habile Aſtronome, qui ne le ſeroit que par les Livres, ſeroit tout étonné, quand il viendroit à manier la Lunette, qu'il ne verroit preſque rien. Les Obſervations ſont une manœuvre très-fine & très-délicate. M. *de Chazelles* étudia cet Art à fond, & en même temps il embraſſa toute cette vaſte Science, dont il eſt le fondement. Il travailla ſous M. *Caſſini* à la grande Carte Geographique en forme de Planiſphére qui eſt ſur le pavé de la Tour Occidentale de l'Obſervatoire, & qui a 27 pieds de diametre. Elle avoit été dreſſée ſur les obſervations que l'Academie avoit déja faites par ordre du Roi en differens endroits de la Terre, & ce qui en eſt le plus remarquable, c'eſt qu'elle fut en quelque ſorte prophetique. Elle contenoit ſur de certaines conjectures de M. *Caſſini* des corrections anticipées & fort importantes, qui ont été juſtifiées depuis par des obſervations inconteſtables.

En 1683. l'Academie continua vers le Septentrion, & vers le Midi le grand ouvrage de la Meridienne commencé en 1670, & M. *Caſſini* à qui le côté du Midi étoit tombé en partage, aſſocia à ce travail M. *de Chazelles*. Ils pouſſerent cette ligne juſqu'à la campagne de *Bourges*.

Après avoir pris des leçons de M. *Caſſini* à l'Obſervatoire pendant 5 ans, M. *de Chazelles* devoit être devenu un excellent Maître. Feu M. le Duc de *Mortemar* le prit pour lui enſeigner les Mathematiques, & le mena avec lui à la campagne de *Gennes* en 1684. Il lui fit avoir l'année ſuivante une nouvelle place de Profeſſeur d'Hydrographie pour les Gale-

res.

res à *Marseille*, car il y en avoit depuis long-temps une ancienne remplie par un Pere Jesuite, à qui il falloit donner du secours, parce que la Marine de *France* s'étoit considerablement fortifiée.

Ces Ecoles sont des especes de petits Etats assez difficiles à gouverner. Tous les Sujets qui les composent sont dans la force de leur jeunesse, impetueux, indociles, amoureux de l'indépendance avec fureur, ennemis presque irreconciliables de toute application, & ce qui est encore pis, ils sont tous gens de guerre, & leur Maître n'a sur eux aucune autorité militaire. Cependant on rend ce témoignage à M. *de Chazelles*, qu'il fut toûjours respecté, & même aimé de ses redoutables Sujets. Il avoit cette douceur ferme & courageuse, qui fait gagner les cœurs avec dignité. Le succès qu'il avoit eu l'encouragea à se charger encore d'une nouvelle Ecole de jeunes Pilotes destinés à servir sur les Galeres. Elle a fourni, & fournit encore tous les jours un grand nombre de bons Navigateurs.

Pendant l'Eté de 86 les Galeres firent 4 petites campagnes, ou plûtôt 4 promenades, où elles ne se proposoient que de faire de l'exercice. M. *de Chazelles* s'embarqua toutes les 4 fois, & alla tenir ses Ecoles sur la Mer. Il montroit aux Officiers la pratique de ce qu'il leur avoit enseigné. Il fit aussi plusieurs observations geometriques & astronomiques, par le moyen desquelles il donna ensuite une nouvelle Carte de la Côte de *Provence*.

Nous passons sous silence deux campagnes, quoique plus longues, & plus considerables, qu'il

qu'il fit en 87 & 88. Elles produisirent toutes deux un grand nombre de Plans qu'il leva, soit des Ports & des Rades, où il aborda, soit des Places qu'il pût voir. On sait assez que ces Plans ne sont pas de simples curiosités, & qu'étant déposés entre les mains des Ministres d'Etat, ils deviennent en certains temps la matiere des plus importantes déliberations, & les reglent d'autant plus sûrement, qu'ils ont été faits de meilleure main.

Il y a long-temps que l'Experience, Maîtresse souveraine de tous les Arts, a fait entre les deux especes des grands Bâtimens de Mer un partage, où tous les Peuples de l'Europe ont souscrit; elle a donné l'Océan aux Vaisseaux, & la Mediterranée aux Galeres. Elles ont trop peu de bord pour soûtenir une vague aussi haute que celle de l'Océan. Mais aussi les Vaisseaux ont ce défaut essentiel qu'ils ne peuvent rien sans le Vent; ce sont de grands corps absolument dépendants de cette ame étrangere, inconstante, & qui les abandonne quelquefois entierement. Au commencement de la derniere guerre quelques Officiers de Marine, & M. *de Chazelles* avec eux, imaginerent qu'on pourroit avoir des Galeres sur l'Océan, qu'elles y serviroient à remorquer les Vaisseaux, quand le Vent leur seroit contraire, ou leur manqueroit, qu'enfin elles les rendroient indépendants du Vent, & par conséquent beaucoup plus agissants que ceux des Ennemis. Elles devoient aussi assurer & garantir les Côtes de Ponant. Ces sortes d'idées hardies, pourvû qu'elles le soient dans certai-

taines bornes, partent d'un courage d'esprit, rare même parmi ceux qui ont le courage du cœur. Sans cette audace, un faux impossible s'étendroit presque à tout. Comme M. *de Chazelles* avoit beaucoup de part à la proposition, il fut envoyé en Ponant au mois de Juillet 1689 pour visiter les Côtes par rapport à la navigation des Galeres. Enfin en 90, 15 Galeres nouvellement construites partirent de *Rochefort* presque entierement sur sa parole, & donnerent un nouveau spectacle à l'Océan. Elles allerent jusqu'à *Torbay* en *Angleterre*, & servirent à la descente de *Tingmouth*. M. *de Chazelles* y fit les fonctions d'Ingenieur, fort differentes de celles de Professeur d'Hydrographie. Quoiqu'il ne fût pas destiné à la guerre, & qu'il ne soit guere naturel qu'un Soldat aït été élevé à l'Observatoire, il marqua & en cette occasion, & en plusieurs autres pareilles, toute l'intrepidité que demande le métier des armes. Les Officiers Généraux sous qui il a servi, attestent que quand ils l'avoient envoyé visiter quelque poste ennemi, ils pouvoient compter parfaitement sur son rapport. Il n'est que trop établi que ceux qui sont chargés de ces sortes de commissions, n'y portent pas tous, ou n'y conservent pas une vûë bien nette. M. *de Chazelles* n'étoit originairement qu'un Savant, & les Sciences mêmes en avoient fait un homme de guerre. Ce qui éleve l'esprit devroit toûjours aussi élever l'ame.

Les Galeres après leur expedition revinrent à l'embouchure de la *Seine* dans les Bassins du *Havre* & de *Honfleur*, mais elles n'y pouvoient pas hiverner, parce qu'il étoit necessaire

aire de mettre de temps en temps ces Baſſins
. ſec, pour éviter la corruption des eaux.
M. *de Chazelles* propoſa de faire monter les Ga-
eres à *Roüen*, tous les Pilotes y trouvoient
les difficultés inſurmontables, il ſoûtint ſeul
qu'elles y monteroient; il s'étoit acquis une
rande confiance, on le crut, & elles mon-
erent heureuſement. Une grande habileté
ne ſuffit pas pour oſer ſe charger d'un évene-
nent conſiderable, il faut encore un zele vif,
ui vueille bien courir les riſques de l'injuſti-
e des hommes, toûjours portés à ne don-
er leur approbation qu'aux ſuccès.

Les Galeres hivernerent donc à *Roüen*, & celui
ui les y avoit amenées devoit naturellement
es préſerver des accidens dont elles étoient
nenacées dans ce ſéjour étranger. Auſſi ima-
ina-t-il une nouvelle ſorte d'amarrage, &
ne petite jettée de pilotis, qui les mettoient
couvert des glaces qu'on craignoit, & cela
peu de frais, au lieu que de toute autre ma-
iere la dépenſe eût été conſiderable.

Pendant qu'il étoit à *Roüen*, il mit en or-
re les obſervations qu'il venoit de faire ſur
es Côtes de Ponant, & en compoſa 8 Car-
es particulieres accompagnées d'un *Portulan*,
'eſt-à-dire d'une ample deſcription de chaque
ort, de la maniere d'y entrer, du fond qui
y trouve, des marées, des dangers, des re-
onnoiſſances, &c. Ces ſortes d'Ouvrages,
uand ils ont toute leur perfection, ſont d'un
rand prix, parce que, comme nous l'avons
éja dit dans l'Hiſt. de 1701 *, & à l'occaſion
e M. de *Chazelles* même, *les Sciences qui*
nt de pratique ſont les moins avancées. Deux

on

* p. 152.

ou trois grands Genies ſuffiſent pour pouſſer bien loin des Theories en peu de temps, mais la pratique procede avec plus de lenteur, à cauſe qu'elle dépend d'un trop grand nombre de mains, dont la plûpart même ſont peu habiles. Les nouvelles Cartes de M. *de Chazelles* furent miſes dans le *Neptune François*, qui fut publié en 1692. Dans cette même année il fit la campagne d'*Oneille*, & ſervit d'Ingenieur à la deſcente.

En 93 M. de *Pontchartrain* alors Secretaire d'Etat de la Marine, & aujourd'hui Chancelier de *France*, ayant réſolu de faire travailler à un ſecond Volume du *Neptune François*, qui comprît la Mer Mediterranée, M. *de Chazelles* propoſa d'aller établir par des obſervations aſtronomiques la poſition exacte des principaux points du Levant, & il ne demandoit qu'un an pour ſon voyage. Il eût été difficile de lui refuſer une grace ſi peu briguée. Il partit, & parcourut la *Grece*, l'*Egypte*, la *Turquie*, toûjours le Quart de cercle & la Lunette à la main. Il eſt vrai que ce n'eſt-là que recommencer continuellement les mêmes operations, ſans acquerir de lumieres nouvelles, au lieu qu'un Savant de Cabinet en acquiert tous les jours avec volupté & avec tranſport; mais plus ce plaiſir eſt flateur, plus il eſt beau de le ſacrifier à l'utilité du Public, qui profite plus de quelques faits bien ſûrs, que de pluſieurs ſpeculations brillantes.

Le voyage de M. *de Chazelles* donna ſur l'Aſtronomie un éclairciſſement important, & long-temps attendu. Il eſt neceſſaire pour la perfection de cette Science que les Aſtronomes

mes de tous les Siécles se transmettent leurs connoissances, & se donnent la main. Mais pour profiter du travail des Anciens, il faut pouvoir calculer pour le lieu où nous sommes, ce qu'ils ont calculé pour les lieux où ils étoient, & par consequent savoir exactement la longitude, & la latitude de ces lieux. On ne peut pas trop s'en rapporter aux Anciens eux-mêmes, parcequ'on observe presentement avec des Instrumens, & une précision qu'ils n'avoient pas, & qui rendent un peu suspect tout ce qui a été trouvé par d'autres voies. Les Astronomes dont il étoit le plus important de comparer les observations aux nôtres étoient *Hipparque*, *Ptolomée*, & *Ticho Brahé*. Les deux premiers étoient à *Alexandrie* en *Egypte*, & ils la rendirent la Capitale de l'Astronomie. *Ticho* étoit dans l'Isle d'*Hüene*, située dans la Mer *Baltique*; il y fit bâtir ce fameux Observatoire, qu'il appella Uranibourg, *Ville du Ciel.* L'Academie presque encore naissante avoit formé le noble dessein d'envoyer des Observateurs à *Alexandrie* & à *Uranibourg*, pour y prendre le fil du travail des grands hommes, qui y avoient habité. Mais les difficultés du voyage d'*Alexandrie* firent que l'on se contenta de celui d'*Uranibourg*, que M. *Picard* voulut bien entreprendre en 1671.

Il y traça la Meridienne du lieu, & fut fort étonné de la trouver differente de 18′ de celle que *Ticho* avoit déterminée, & qu'il ne devoit pas avoir déterminée negligemment, puisqu'il s'agissoit d'un terme fixe, où se rapportoient toutes ses observations. Cela pouvoit faire croire que les Meridiens

changeoient, c'est-à-dire, que la Terre, supposé qu'elle tourne, ne tourne pas toûjours sur les mêmes Poles, car si un autre point devient Pole, tous les Meridiens qui doivent passer par ce nouveau point ont necessairement changé de position. On voit assez combien il importoit aux Astronomes de s'assurer ou de la variation, ou de l'invariabilité des Poles de la Terre, & des Meridiens.

M. *de Chazelles* étant en *Egypte* mesura les Pyramides, & trouva que les 4 côtés de la plus grande étoient exposés précisément aux 4 Regions du Monde. Or comme cette exposition si juste doit selon toutes les apparences possibles avoir été affectée par ceux qui éleverent cette grande masse de pierres, il y a plus de 3000 ans, il s'ensuit que pendant un si long espace de temps rien n'a changé dans le Ciel à cet égard, ou, ce qui revient au même, dans les Poles de la Terre, ni dans les Meridiens. Se seroit-on imaginé que *Ticho*, si habile & si exact Observateur, auroit mal tiré sa Meridienne, & que les anciens *Egyptiens* si grossiers, du moins en cette matiere, auroient bien tiré la leur? L'invariabilité des Meridiennes a été encore confirmée par celle que M. *Cassini* a tirée en 1655 dans l'Eglise de *S. Petrone* à *Bologne*.

M. *de Chazelles* rapporta aussi de son voyage de Levant tout ce que l'Academie souhaitoit sur la position d'*Alexandrie*. Aussi M. *de Pontchartrain* crut-il lui devoir une place dans une Compagnie, à qui ses travaux étoient utiles. Il y fut associé en 1695. Il retourna ensuite à *Marseille* reprendre ses premieres fonctions.

Tout

Tout le reste de sa vie n'est guere qu'une repetition perpetuelle de ce que nous avons vû jusqu'ici. Des campagnes sur mer presque tous les ans, soit en guerre, soit en paix, quelques-unes seulement considerables, comme celle de 1697 où *Barcelone* fut prise, des positions qu'il prend de tous les lieux qu'il voit, des Plans qu'il leve, des fonctions d'Ingenieur qu'il fait assez souvent, & avec gloire, & puis un retour paisible à son Ecole de *Marseille*. Il ne s'en dégoûtoit point pour avoir eu quelques occupations plus brillantes, jamais il ne songea à la quitter. Les plus grandes ames sont celles qui s'arrangent le mieux dans la situation presente, & qui dépensent le moins en projets pour l'avenir.

Lorsqu'en 1700 M. *Cassini* par ordre du Roi alla continuer du côté du Midi la Meridienne abandonnée en 83, M. *de Chazelles* fut encore de la partie. Il ne pût joindre qu'à *Rodez* M. *Cassini*, qui, pour ainsi dire, filoit la Meridienne en s'éloignant toûjours de *Paris*. Mais depuis *Rodez* M. *de Chazelles* s'attacha si fortement à ce travail, & cela, pendant la plus fâcheuse saison de l'année, que sa santé commença à s'en alterer considerablement.

La Ligne étant poussée jusqu'aux frontieres d'*Espagne*, il revint à *Paris* en 1701, & il fut malade ou languissant pendant plus d'une année. Ce fut alors qu'il communiqua à l'Academie le vaste dessein qu'il méditoit d'un Portulan général de la Mediterranée*. On peut compter que dans les Cartes Geogra-

I 2 phi-

* V. l'Hist. de 1701. p. 152. & suiv.

phiques, & Hydrographiques des trois quarts du Globe le portrait de la Terre n'eſt encore qu'ébauché, & que même dans celles de l'*Europe*, il eſt aſſez éloigné d'être bien fini, ni bien reſſemblant, quoiqu'on y ait beaucoup plus travaillé.

Malgré pluſieurs ſoins differents, & les infirmités même qui deviennent le plus grand de tous les ſoins, M. *de Chazelles* ne perdoit point de vûë ſes Galeres égarées dans l'Océan. Etant encore à *Paris* en 1702, il propoſa qu'elles pouvoient reſter à ſec dans tous les Ports, où il entroit aſſez de marée pour les y faire entrer. Par-là il triploit le nombre des occaſions, où elles pouvoient être employées. On fit à *Ambleteuſe* l'épreuve de ſa propoſition ſur deux Galeres qu'on échoüa, & elles ſoûtinrent l'échoüage pendant 15 jours ſans aucun inconvenient. Au contraire il donna une merveilleuſe commodité pour eſpalmer. Il faut oſer en tout genre, mais la difficulté eſt d'oſer avec ſageſſe; c'eſt concilier une contradiction.

Les 9 dernieres années de la vie de M. *de Chazelles*, quoiqu'auſſi laborieuſes que les autres, furent preſque toûjours languiſſantes, & ſa ſanté ne fit plus que s'affoiblir. Enfin il lui vint une fievre maligne qu'il negligea dans les commencemens, ſoit par l'habitude de ſouffrir, ſoit par la défiance qu'il avoit de la Medecine, à laquelle il préferoit les reſſonrces de la Nature. Enfin il mourut le 16 Janvier 1710 entre les bras du P. *Laval* Jeſuite, ſon Collegue en Hydrographie, & ſon intime ami. Quand deux amis le ſont dans des poſtes qui naturellement les rendent rivaux,

vaux, il ne faut plus leur demander des preuves d'équité, de droiture, ni même de generosité. A ces vertus, & à celles que nous avons déja representées, M. *de Chazelles* joignit toûjours un grand fond de Religion, c'est-à-dire, ce qui assure & fortifie toutes les vertus.

Sa place d'Academicien Associé a été remplie par M. *Ozanam*.



E L O G E
DE M. GUGLIELMINI.

DOMENICO GUGLIELMINI nâquit à *Bologne* d'une honnête Famille le 27 Septembre 1655. Il étudia en Mathematique sous M. *Geminiano Montanari* Modenois, & en Medecine sous l'illustre *Malpighi*. Il embrassa ces deux genres d'étude à la fois, comme un homme né avec d'heureuses dispositions en auroit pû embrasser un seul, & il s'attira la même affection de ses deux Maîtres, que si chacun d'eux eût eu seul la gloire de le former.

En 1676 il parut dans une grande partie de l'*Italie* un Meteore aussi lumineux que la Lune en son plein. M. *Montanari* fit un petit Ouvrage intitulé *Fiamma volante*, où par les observations qu'il avoit eues de differents endroits il recherchoit geometriquement quelle étoit la ligne du mouvement de cette Flamme, sa distance à la Terre, & sa grandeur. Selon son calcul, la distance étoit à peu près

de 15 lieuës moyennes de *France*, ce qui est une hauteur extraordinaire pour ces sortes de Feux. M. *Cavina* qui avoit observé le même Phenomene à *Faënza* en avoit fait un calcul fort different, la hauteur où il le mettoit, par exemple, étoit triple de celle de M. *Montanari*, & celui-ci d'ailleurs avoit negligé dans son Ecrit les observations de *Faënza*, non pas en les rejettant avec mépris, mais en disant qu'il étoit bien fâché de les trouver trop éloignées de toutes les autres, & qu'apparemment l'erreur venoit de ceux qui les avoient données, & à qui on s'étoit fié. Cette politesse n'empêcha pas M. *Cavina* de repliquer aigrement à M. *Montanari*, qui voyant cette dispute dégenerer en injures, se sentit assez fort pour oser déclarer publiquement qu'il y renonçoit. M. *Guglielmini* âgé alors de 21 an, & Disciple aussi zelé de *Montanari*, que nous avons dit il y a quelques années que *Viviani* l'étoit de *Galilée* *; car ces sortes d'attachements semblent avoir plus de force en *Italie*, demanda à son Maître la permission de répondre pour lui. Il la lui refusa, de peur que son Adversaire ne crût toûjours voir le Maître caché sous le nom du Disciple, mais M. *Guglielmini* trouva moyen de vaincre cette difficulté. Il proposa & il obtint de soûtenir des Theses publiques, où M. *Montanari* n'assisteroit point, & où M. *Cavina*, dont elles attaquoient l'opinion, seroit invité, & attendu pendant un certain temps. Il n'y vint point, il traita ce défi comme un Duel seroit traité en *France*, & il paroît qu'il fit bien. Quoique M. *Guglielmini* avoue qu'il n'étoit

* V. l'Hist. de 1703. p. 162.

n'étoit pas encore entierement ſorti des Sections Coniques, il terraſſoit en Geometrie ſon Adverſaire. Il y eut aſſez d'écrits & aſſez gros ſur une matiere, qui au fond ne les meritoit pas. Deux ou trois Pages auroient ſuffi pour la Verité, les paſſions firent des Livres.

M. *Guglielmini* fut reçû Docteur en Medecine dans l'Univerſité de *Bologne* en 1678, mais au milieu de l'application & des études que demande cette penible profeſſion, un nouveau Phenomene, qui parut au Ciel, le rappella encore pour un temps du côté des Mathematiques. Ce fut la Comete de 1680 & 81, qui par je ne ſai quelle deſtinée particuliere remua plus qu'une autre le Monde ſavant. Le ſentiment de ceux qui croyent les Cometes des Corps éternels, auſſi-bien que les Planetes, avoit été attaqué par M. *Montanari*, ſur ce fondement que cette derniere Comete qui avoit diſparu à la fin de Fevrier 1681 n'étoit point alors aſſez éloignée de la Terre pour diſparoître par ſon éloignement ſeul, & qu'il devoit y avoir eu par conſéquent quelque diſſolution phyſique. Cette raiſon, qui pouvoit n'être pas démonſtrative, le devint en quelque ſorte pour M. *Guglielmini*, parcequ'elle venoit d'un Maître qu'il cheriſſoit, & elle l'engagea à chercher quelque moyen d'expliquer la génération des Cometes. Il en imagina un aſſez ſingulier, dont il fit un Ouvrage intitulé *De Cometarum natura & ortu Epiſtolica Diſſertatio. Bononiæ* 1681. Il donne aux Planetes des Tourbillons fort étendus, de ſorte que ceux, par exemple, de Jupiter & de Saturne, qui ont leurs centres

éloignés de 165 millions de lieuës, lorſqu'ils s'approchent le plus qu'il eſt poſſible, peuvent alors ſe couper vers leurs extremités. Dans cet entrelaſſement, & cet embarras de la matiere de deux Tourbillons, il ſe forme en vertu des mouvements oppoſés qui ſe combattent un Tourbillon nouveau, dont les parties les plus groſſieres, car la matiere céleſte n'eſt pas toute homogene, vont occuper le centre, & produiſent un nouveau Corps ſolide, qui eſt la tête de la Comete. Nous ne rapporterons ni les preuves, ni les difficultés de ce Syſtême, l'Auteur déclare qu'il ne le croit ni vrai, ni même vraiſemblable, mais ſeulement propre à expliquer les faits, & il ne le propoſe qu'avec une modeſtie, qui en répare la foibleſſe, & deſarme les Critiques.

Il donna de nouvelles preuves de ſon ſavoir dans l'Aſtronomie par l'obſervation qu'il fit à *Bologne* de l'Eclipſe ſolaire du 12 Juillet 1684, & qu'il imprima en Latin la même année.

Le merite de M. *Guglielmini* fut reconnu juſque dans ſon Païs. Le Senat de *Bologne* le fit premier Profeſſeur de Mathematique, & lui donna en 1686 l'Intendance générale des Eaux de cet Etat. Les Voyageurs nous rapportent qu'en *Perſe* la Charge de Sur-intendant des Eaux eſt une des plus conſiderables, à cauſe de la ſechereſſe du Païs, & de la difficulté de l'arroſer ſuffiſamment, & également. Par une raiſon toute contraire, cette Charge eſt de la même importance dans le *Bolonois*, & en général dans la *Lombardie*, où la grande quantité & la diſpoſition des Ri-

vieres,

vieres & des Canaux, si utiles d'ailleurs au Païs, peuvent cependant produire de grands inconveniens, à moins que l'on n'y veille continuellement, & avec des yeux fort éclairez. M. *Guglielmini* eut cette délicatesse assés rare de regarder sa Commission de Surintendant des Eaux, non comme une de ces Commissions, dont on s'acquite toûjours assez bien avec quelques connoissances ordinaires, & où il suffit de ne rien gâter, mais comme un engagement serieux à tourner ses principales pensées de ce côté-là, & à servir le Public à toute rigueur.

Il donna donc dès l'année 1690 la premiere Partie, & en 91 la seconde d'un Traité d'Hydrostatique intitulé *Aquarum fluentium mensura nova methodo inquisita*, & dédié au Senat de *Bologne*. Son principe fondamental, & reçû de tous les Philosophes modernes, est que les vitesses d'une eau qui sort d'un tuyau vertical ou incliné, sont à chaque instant comme les Racines des hauteurs de sa surface superieure, ce qui amene necessairement la Parabole dans toute cette matiere. Quand même l'eau coule dans un canal horizontal, ce qui se peut pourvû qu'elle ait une issuë pour se décharger, c'est encore le même principe, parce que l'eau superieure pressant l'inferieure, lui imprime de la vitesse à raison de sa hauteur.

Si l'on veut trouver dans un canal horizontal la vitesse moyenne entre celle du fond qui est la plus grande, & celle de la superficie qui est la plus petite, ou même nulle geometriquement, on voit aussi-tôt par la quadrature de la Parabole que cette vitesse est

toûjours à celle du fond comme 2 à 3, & qu'elle est toûjours placée aux $\frac{4}{9}$ de la hauteur du canal divisé de haut en bas.

Quand on a une experience fondamentale sur la vitesse de l'eau, par exemple, celle de M. *Guglielmini*, par laquelle une eau qui est tombée de la hauteur de 1 pied de *Bologne* parcourut en 1 minute 216 pieds 5 pouces d'un mouvement égal, on a sa vitesse pour toutes les chutes possibles, & il en a calculé une Table qu'il n'a poussée que jusqu'à 30 pieds de chute, parceque les plus grands Fleuves de l'Europe ne passent pas cette profondeur. Si l'on veut mesurer la quantité d'eau qui passe en 1 minute par un canal horizontal, comme on sait que sa vitesse moyenne est aux $\frac{4}{9}$ de sa hauteur, il faut avoir ces $\frac{4}{9}$ en pieds & en pouces; on trouve ensuite par la Table quelle vitesse convient à une chute ou pression de cette hauteur, c'est-là la vitesse moyenne de l'eau, & en la multipliant par la hauteur & largeur du canal, on a la quantité d'eau cherchée. M. *Guglielmini* trouve par cette methode que le *Danube* supposé horizontal à son embouchure, comme le font presque toûjours les grands Fleuves, du moins sensiblement, jette dans le *Pont Euxin* en 1 minute près de 42 millions de pieds cubiques *Bolonnois* d'eau.

Pour les Canaux inclinés, il ne faut qu'un peu plus de calcul, & de plus la connoissance de l'angle d'inclinaison du canal, après quoi tout le reste est pareil.

Telle est l'idée générale de tout l'Ouvrage. Il est fort net & fort methodique. Peut-être seulement paroîtroit-il un peu diffus à ceux

ceux qui ont pris le goût & l'habitude de cette brieveté vive de l'Algebre, assez semblable en fait de Mathematique à ce qu'on appelle en Eloquence, & en Poësie le Stile serré. Mais chaque Auteur écrit principalement pour son Païs, & quoique l'*Italie* ait été, du moins en *Europe*, le berceau de l'Algebre, cette Science n'y avoit pas encore beaucoup prosperé du temps de M. *Guglielmini*, & elle avoit trouvé les climats du Nord bien plus favorables.

Les *Actes de Leipsic* ayant rendu compte en 1691 du Livre de la Mesure des Eaux, M. *Papin* fit quelques Remarques & quelques Objections sur l'Extrait qu'il y en avoit vû, & les fit inserer dans ce même Journal. Cela revint en gros à M. *Guglielmini* par des Lettres de M. *Leibniz*, avant qu'il pût avoir en Italie les *Actes de Leipsic*. Au nom de M. *Papin*, il eut peur de s'être trompé, car on n'en peut douter après l'aveu qu'il en fait lui-même, à moins qu'on ne vueille tenir pour un peu suspect cet aveu si glorieux, à qui entend la veritable gloire. Il vit enfin les *Actes de Leipsic*, & se rassura. Il écrivit à M. *Leibniz* pour le rendre Juge du differend.

M. *Papin* croyoit & prétendoit démontrer que l'eau qui sort d'un tuyau toûjours plein a la moitié moins de vitesse, que la premiere eau qui sort du même tuyau qui se vuide. Sa raison étoit que dans le premier cas l'eau n'a qu'un mouvement égal & uniforme, au lieu que dans le second elle a un mouvement acceleré, puisqu'elle tombe, ou est censée tomber. M. *Guglielmini* détruisit cette prétension avec

toute l'honnêteté que devoit garder un homme qui s'étoit crû sincerement capable d'erreur, il paroît par toute sa Lettre qu'il doit avoir entierement gain de cause, & cependant il paroît aussi qu'il y avoit encore en cette matiere quelque chose qu'il ne démêloit pas, & qui lui échapoit à lui-même. Les vitesses de l'eau qui sont comme les racines des hauteurs, ayant précisément entre elles le même rapport que les vitesses des corps pesants qui tombent, les deux Adversaires, & tous les autres Philosophes avoient également pris cette idée fort naturelle, que les vitesses de l'eau dépendent donc d'une acceleration causée par une chute ; mais nous avons fait voir après M. *Varignon* dans l'Hist. de 1703 * que cette idée si naturelle n'est point vraie, & qu'il y a un autre principe de ce rapport des vitesses de l'eau, tout different de l'acceleration, & en même temps si simple, qu'il ne feroit pas un grand merite à son Inventeur, s'il n'avoit été long-temps caché aux plus habiles Geometres. Faute de l'avoir connu, M. *Guglielmini* ne peut éviter de certains embarras, d'où il tâche à se sauver par des pressions de l'air. Il ne suffit pas de tenir une verité, il faut aussi, quand on veut la suivre un peu loin, en tenir la veritable cause, autrement la fausse cause d'une verité revient à enfanter des erreurs, ses productions naturelles. La Lettre de M. *Guglielmini* à M. *Leibniz* fut suivie en 1692 d'une autre adressée à M. *Magliabecchi* sur les Syphons, parcequ'il avoit trouvé dans les *Actes de Leipsic* que M. *Papin* en examinant un Syphon fait à *Wir-*

* p. 154. & 155.

Wirtemberg, s'étoit servi de sa fausse proposition. Les deux Lettres furent imprimées sous le titre de *Epistolæ duæ Hydrostaticæ*.

Il s'éleva en ce tems-là un different sur les eaux entre les Villes de *Bologne* & de *Ferrare*. Il s'agissoit principalement de savoir si on devoit remettre le cours du *Reno* dans le *Po*. Le Pape maître de ces deux Etats envoya les Cardinaux *Dada* & *Barberin* pour juger de cette affaire. *Bologne* chargea de ses interêts le seul qu'elle en pût charger, M. *Guglielmini*. Les deux Cardinaux avec qui il traita prirent une si grande idée de sa capacité, qu'ils l'employerent, non-seulement pour les eaux du *Bolonnois*, mais encore pour celles du *Ferrarois*, & du territoire de *Ravenne*, & l'engagerent à faire des desseins de differents travaux utiles, ou necessaires. Mais il lui arriva alors ce que nous avons déja dit * qui étoit arrivé à M. *Viviani* en pareille matiere; des Projets qui ne regardoient que le bien public n'eurent point d'execution.

Comme M. *Guglielmini* avoit porté la Science des Eaux plus loin qu'elle n'avoit encore été, du moins en *Italie*, & qu'il en avoit fait une Science presque nouvelle, *Bologne* fonda dans son Université en 1694 une nouvelle Chaire de Professeur en *Hydrometrie*, qu'elle lui donna. Le nom d'*Hydrometrie* étoit nouveau aussi-bien que la place, & l'un & l'autre rappelleront toûjours la memoire de celui qui en a rendu l'établissement necessaire.

Il se permettoit cependant quelques distractions de son étude des Eaux, dans des occasions où il eût été difficile de résister à d'au-

* V. l'Hist. de 1703. p. 174.

tres Sciences qui l'appelloient. Quand M. *Cassini* retourna à *Bologne* en 1695, & y raccommoda la fameuse Meridienne qu'il avoit tracée 40 ans auparavant dans l'Eglise de *S. Petrone*, & que differents accidents avoient alterée, M. *Guglielmini* l'aida dans ce grand travail astronomique, & fit même imprimer un Memoire des operations qu'on avoit faites pour la construction, & pour la verification de ce prodigieux Instrument. Il s'en servit depuis pendant plusieurs années à observer les mouvemens du Soleil & de la Lune.

En 1697 il publia son grand ouvrage *Della natura de' Fiumi*, qui passe pour son Chef-d'œuvre. Il le dédia à M. l'Abbé *Bignon*, qui l'année précédente l'avoit fait associer à l'Academie Royale des Sciences, & dont le nom & le merite, sans le secours d'un pareil bienfait, s'attirent souvent des Savans même étrangers de pareils hommages. La Préface roule sur la necessité de porter dans la Physique la certitude de la Geometrie, & sur la difficulté souvent insurmontable de faire entrer les idées simples de la Geometrie dans la Physique, aussi compliquée qu'elle est.

Un Physicien ordinaire ne doutera peut-être pas qu'il ne connoisse suffisamment la nature des Rivieres, mais après avoir lû le Livre de M. *Guglielmini*, il demeurera convaincu qu'il ne la connoissoit point. Nous ne rapporterons ici que les vûës générales de ce Traité, & nous laisserons à imaginer ce que peuvent produire les differentes combinaisons des principes, & les applications aux cas particuliers.

Les

Les Fleuves près de leurs sources descendent ordinairement de quelques Montagnes, & là ils tirent leur vitesse de l'acceleration de la chute, mais à mesure qu'ils s'éloignent cette vitesse diminuë, parceque l'eau frotte toûjours contre le fond & contre les rives, qu'elle rencontre en son chemin differents obstacles, & qu'enfin venant à couler dans les Plaines elle a toûjours moins de chute, & s'incline davantage à l'Horizon. Le *Reno* y est à peine incliné de 52 secondes vers le bas de son cours. Si la vitesse acquise par la chute se perd entierement, ce qui peut arriver à force d'obstacles redoublés, & après que le cours sera devenu tout à fait horizontal, il n'y a plus que la hauteur, ou la pression toûjours proportionnée à la hauteur, qui puisse rendre de la vitesse à l'eau, & la faire couler. Heureusement cette ressource croît selon le besoin, car à mesure que l'eau perd de sa vitesse acquise par la chute, elle s'éleve, & augmente en hauteur.

Les parties superieures de l'eau d'une Riviere, & éloignées des bords, peuvent couler par la seule cause de la déclivité, quelque petite qu'elle soit, car n'étant arrêtées par aucun obstacle elles peuvent sentir avec délicatesse, pour ainsi dire, la moindre difference du niveau, mais les parties inferieures, qui frotent contre le fond, ne seroient pas suffisamment muës par une si petite declivité, & elles ne le sont que par la pression des superieures.

La viscosité naturelle des parties de l'eau, & une espece d'engrainement qu'elles ont les unes avec les autres, fait que les inferieures muës

muës par la hauteur entraînent les ſuperieures, qui dans un canal horizontal n'auroient eu d'elles-mêmes aucun mouvement, ou dans un canal peu incliné en auroient eu peu. Ainſi les inferieures en ce cas rendent aux ſuperieures une partie du mouvement qu'elles en ont reçû. Delà vient auſſi qu'aſſez ſouvent la plus grande viteſſe d'une riviere eſt vers le milieu de ſa hauteur, car ces parties du milieu ont l'avantage & d'être preſſées par la moitié de la hauteur de l'eau, & d'être libres des frotemens du fond.

On peut reconnoître ſi l'eau d'une riviere à peu près horizontale coule par la viteſſe acquiſe dans la chute, ou par la preſſion de la hauteur. Il ne faut qu'oppoſer à ſon cours un obſtacle perpendiculaire; ſi l'eau s'éleve ſubitement contre cet obſtacle, elle couloit en vertu de ſa chute, ſi elle s'arrête quelque temps, c'étoit par la preſſion.

Les Fleuves ſe font preſque toûjours leur lit. Que le fond ait d'abord une grande pente, l'eau qui par conſequent aura beaucoup de chute & de force emportera les parties de ce terrain les plus élevées, & les entraînant plus bas, rendra ce fond plus horizontal. C'eſt ſous le fil de l'eau qu'eſt ſa plus grande force de creuſer, & par conſequent c'eſt-là que le fond s'abaiſſe le plus, & il s'y fait une plus grande concavité. L'eau qui a rendu ſon lit plus horizontal l'eſt devenuë auſſi davantage, & par-là elle a moins de force de creuſer, & enfin cette force étant diminuée juſqu'à n'être plus qu'égale à la réſiſtance du fond, voilà le fond en état de conſiſtence, du moins pour un temps conſiderable. Les fonds

fonds de craye resistent plus que ceux de sable, ou de limon.

D'un autre côté, l'eau ronge & mine ses bords, & avec d'autant plus de force que par la direction de son cours elle les rencontre plus perpendiculairement. Elle tend donc en les rongeant à les rendre paralleles à son cours, & quand elle y est parvenuë autant qu'il est possible, elle n'a plus d'action sur eux à cet égard. En même tems qu'elle les a rongés, elle a élargi son lit, c'est-à-dire qu'elle a perdu de sa hauteur & de sa force, ce qui étant arrivé à un certain point, il se fait encore un équilibre entre la force de l'eau, & la résistance des bords, & les bords sont établis.

Il est manifeste par l'experience que ces équilibres sont réels, puisque les rivieres ne creusent & n'élargissent pas leurs lits à l'infini.

Tout le contraire de ce que nous venons de dire arrive pareillement. Les Fleuves dont les eaux sont troubles & bourbeuses haussent leur lit, en y laissant tomber les matieres étrangeres, lorsqu'ils n'ont plus la force de les soûtenir. Ils rétrecissent aussi leurs bords, parceque ces mêmes matieres s'y attachent, & y forment comme des enduits de plusieurs couches. Ces matieres rejettées loin du fil de l'eau à cause de leur peu de mouvement, peuvent même suffire pour faire des bords.

Ces effets opposés se rencontrant presque toûjours ensemble, & se combinant très-differemment selon le degré dont ils sont chacun en particulier, il n'est pas aisé de juger le

le produit qui en résultera. Cependant c'est cette combinaison embarrassée qu'il faut saisir assez juste, quand on a affaire à un fleuve, qu'on veut, par exemple, détourner de son cours. On peut compter qu'il agira toûjours selon sa nature, & qu'il s'accommodera lui-même un lit, & se fera un cours tel qu'il lui conviendra. M. *Guglielmini* rapporte qu'au commencement du Siécle passé le *Lamone* qui se rendoit dans le *Po di Primaro* en fut détourné parcequ'on vouloit qu'il s'allât jetter seul dans le *Golphe Adriatique*. Il est arrivé que le *Lamone* devenu plus foible quand il n'a eu que ses propres eaux, a tellement haussé son lit par des dépositions de limon & de fange, qu'il s'est trouvé plus haut que n'est le *Po* dans ses plus fortes crues, & qu'il a eu besoin de levées très-hautes.

La necessité de faire des levées ou digues aux rivieres peut venir de plusieurs causes. Voici les principales. 1°. Si les rivieres sont tortueuses, leurs bords qui les arrêtent à l'endroit des sinuosités font élever les eaux, & leur donnent plus de force pour les ronger eux-mêmes, & pour les percer, après quoi elles se répandent dans les campagnes. 2°. Les rives peuvent être foibles, comme celle que les fleuves se sont faites eux-mêmes par la déposition des matieres étrangeres qu'ils charioient. Telles sont les rives de la plûpart des fleuves de la *Lombardie*, & non-seulement ces rives, mais les plaines mêmes ont été formées par les fleuves. Il est bon de remarquer que les plaines faites ainsi par *alluvion* sont plus hautes vers les bords des rivieres qui les ont produites, & toûjours ensuite plus bas-

basses. 3°. Les fleuves qui courent sur du gravier fort gros sont sujets dans leurs cruës à en faire de grands amas, qui ensuite détournent leur cours. Ils sont indomptables le plus souvent, témoin la *Loire*, au lieu que ceux qui ont un fond de sable leger sont plus traitables.

Un petit fleuve peut entrer dans un grand sans augmenter sa largeur, ni même sa hauteur. Ce paradoxe apparent est fondé sur ce qu'il est possible que le petit n'ait fait que rendre coulantes dans le grand les eaux des bords qui ne l'étoient point, & augmenter la vitesse du fil, le tout dans la même proportion qu'il a augmenté la quantité de l'eau. Le bras du *Po* de *Venise* a absorbé le bras de *Ferrare*, & celui du *Panaro* sans aucun élargissement de son lit. Il faut raisonner de même à proportion de toutes les cruës qui surviennent aux Rivieres, & en général de toute nouvelle augmentation d'eau qui augmente aussi la vitesse.

Si un fleuve qui se presenteroit pour entrer dans un autre fleuve, ou dans la Mer, n'étoit pas assez fort pour en surmonter la résistance, il s'éleveroit, ou parce que sa vitesse seroit retardée, ou parce que les eaux qui devroient le recevoir regorgeroient dans les siennes; mais par cette élevation il acquerroit la force necessaire pour entrer, il la tireroit de l'opposition même qu'il auroit à combattre.

Un fleuve qui entreroit perpendiculairement dans un autre, ou même contre son courant, seroit détourné peu à peu de cette direction par celui qui le recevroit, & obligé à

à se faire un nouveau lit vers son embouchure.

L'union de deux rivieres en une les fait couler plus vîte, parce qu'au lieu du frotement de 4 rives elles n'ont plus que celui de 2 à surmonter, que le fil plus éloigné des bords va encore plus vîte, & qu'une plus grande quantité d'eau muë avec plus de vitesse creuse davantage le fond, & diminuë la premiere largeur. Delà vient aussi que les rivieres unies occupent moins d'espace sur la surface de la Terre, permettent plus facilement que les campagnes un peu basses y déchargent leurs eaux superfluës, & ont moins besoin de levées qui empêchent leurs inondations. Ces avantages sont tels que M. *Guglielmini* les croit dignes d'avoir été envisagés par la Nature, lorsqu'elle a rendu l'union des fleuves si ordinaire.

Ce sont-là les principes les plus généraux du Traité *Della natura de' Fiumi*. L'Auteur en fait l'application à tout ce qu'il appelle *l'Architecture des Eaux*, c'est-à-dire, à tous les Ouvrages qui ont les Eaux pour objet, aux nouvelles communications de rivieres, aux Canaux que l'on tire pour arroser des Païs qui en ont besoin, aux Ecluses, au dessechement des Marais, &c.

Ce Livre, original en cette matiere, eut un grand éclat. *Cremone*, *Mantouë*, & quelques autres Villes eurent recours au fameux Architecte des Eaux. Il ordonna les travaux qui leur étoient necessaires, mais son Art brilla principalement dans des levées qu'il fit au *Po* au-dessous de *Plaisance*, où ce fleuve faisoit de grands ravages, & menaçoit d'en faire encore de plus grands. La

La Republique de *Venise* l'envia à l'Etat de *Bologne*, & lui donna en 1698 la Chaire de Mathematique à *Padouë*. Cependant sa Patrie pour se le conserver autant qu'il étoit possible, & pour se pouvoir toûjours vanter qu'il lui appartenoit, voulut qu'il gardât le titre de Professeur dans son Université, & lui continua même ses apointemens.

Venise ne le laissa pas long-temps dans les exercices tranquilles & dans l'ombre d'une Université. En 1700 elle l'envoya en *Dalmatie* réparer les ruines de *Castelnovo*, & quelque temps après dans le *Frioul*, où un Torrent très-impetueux qui avoit déja détruit plusieurs Villages étoit prêt à tomber sur l'importante Forteresse de *Palme*. M. *Guglielmini* fait sentir tant d'amour pour le bien public dans ses Ouvrages, même dans ceux où la secheresse mathematique domine, qu'il faut lui compter tous ces voyages, & toutes ces fatigues, pour autant d'agrémens dans sa vie.

Peut-être l'envie de servir le Public de toutes les manieres dont il le pouvoit servir, le fit-elle retourner à la Medecine, qu'il sembloit avoir sacrifiée aux Mathematiques. Il prit en 1702 la Chaire de Professeur en Medecine Theorique à *Padouë*, & quitta celle qu'il avoit auparavant. Une Dissertation qu'il avoit publiée l'année précedente *De Sanguinis natura & constitutione*, avoit pû être un présage de ce changement, c'étoit du moins une preuve & de son grand travail, & de la grande étenduë de ses connoissances.

Mais il en donna une beaucoup plus éclatante par son Livre intitulé *De Salibus Disser-*

ſertatio Epiſtolaris Phyſico-Medico-Mechanica, imprimé à *Veniſe* en 1705. Il n'y a pas encore fort long-temps que tous les raiſonnemens de Chimie n'étoient que des eſpeces de fictions poëtiques, vives, animées, agréables à l'imagination, inintelligibles, & inſupportables à la Raiſon. La ſaine Philoſophie a paru, qui a entrepris de réduire à la ſimple mechanique corpuſculaire cette Chimie ſi myſterieuſe, & en quelque façon ſi fiere de ſon obſcurité. Cependant il faut avoüer qu'il lui reſte encore chez quelques Auteurs des traces de ſon ancienne Poëſie, des unions preſque volontaires, des combats qui ne ſont guere fondés que ſur des inimitiés, & quelques autres idées qui peuvent ne pas convenir au ſevere mechaniſme. M. *Guglielmini* paroît avoir eu une extrême attention à ne leur pas permettre de ſe gliſſer dans ſa Diſſertation chimique, il y rappelle tout avec rigueur aux regles d'une Phyſique exacte & claire, & pour épurer la Chimie encore plus parfaitement, & en entraîner toutes les ſaletés, il y fait paſſer la Geometrie. Le fondement de tout l'Ouvrage eſt que les premiers principes du Sel commun, du Vitriol, de l'Alun, & du Nitre ont par leur premiere création des figures fixes & inalterables, & ſont indiviſibles à l'égard de la force déterminée qui eſt dans la matiere. Le Sel commun primitif eſt un petit Cube, le Sel du Vitriol un Parallelepipede rhomboïde, celui du Nitre un Priſme qui a pour baſe un Triangle équilateral, celui de l'Alun une Pyramide quadrangulaire. De ces premieres figures viennent celles qu'ils affectent conſtamment dans leurs cryſtalliſations,

pourvû

ourvû qu'on les tienne auſſi exempts qu'il ſe puiſſe de tout mêlange, & de tout trouble étranger. Quand il s'agit de l'action des Sels, M. *Guglielmini* examine geometriquement & mechaniquement les proprietés de ces figures par rapport au mouvement, & en vient à un détail aſſez curieux, & fort nouveau dans un Traité de Chimie. Il ne rapporte pas d'experiences, ni d'obſervations nouvelles qu'il ait faites, il établit ſon Syſtême ſur celles des plus fameux Auteurs, parmi leſquels il cite ſouvent les Confreres qu'il avoit dans cette Academie, Mrs *Homberg*, *Lémery*, *Boulduc*, *Geoffroy*. En un mot, ce n'eſt pas tant la Chimie qui domine dans ce Traité que la Geometrie, & ce qui vaut encore mieux, l'eſprit geometrique.

Quand on achevoit l'Impreſſion de ce Livre, il reçût l'Hiſtoire de l'Academie de 1702. Il y trouva un ſentiment de M. *Homberg* tout oppoſé au ſien, que les figures conſtantes des Sels Acides dans leurs cryſtalliſations ne viennent pas des premieres particules qui les compoſent, mais des Alcali avec leſquels ils ſe ſont unis. Il avouë qu'il eut peur que l'autorité d'un ſi grand Chimiſte ne fût ſeule ſuffiſante pour renverſer tout ſon Syſtême, & il ſe hâta de le mettre à couvert par une Réponſe, qui pour être fort honnête & fort polie ne perd rien de ſa force, & peut-être en a davantage.

Il fit encore deux ouvrages de Phyſique, un intitulé *Exercitatio de Idearum vitiis, correctione, & uſu ad ſtatuendam & inquirendam morborum naturam* en 1707, & l'autre *De Principio Sulphureo* en 1710, & ce qui eſt fort

fort glorieux pour lui, la datte de ce dernier Ouvrage eſt celle de ſa mort. Sa vie entiere a été dévoüée aux Sciences. Ceux qui les aïment avec moins d'emportement pourroient lui reprocher ſes excès, qui à la verité ruïnerent en lui un temperament très-robuſte, mais qui cependant ne peuvent être blâmés qu'avec reſpect. Il avoit cet exterieur que le Cabinet donne ordinairement, quelque choſe d'un peu rude & d'un peu ſauvage, du moins pour ceux à qui il n'étoit pas accoûtumé; *il mépriſoit*, dit le Journal des Savans d'Italie, *cette politeſſe ſuperficielle dont le monde ſe contente, & s'en étoit fait une autre qui étoit toute dans ſon cœur.*

Sa place d'Academicien Aſſocié Etranger a éte remplie par Mylord Comte de *Pembroke.*

F. I N.

M E-

MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE.

TIREZ DES REGISTRES de l'Academie Royale des Sciences,

De l'Année M. DCCX.



EXPERIENCES *SUR LE RESSORT DE L'AIR.*

PAR M. CARRE'.

* LISANT il y a quelques jours dans l'*Histoire de l'Academie* de l'année 1708, p. 22. quelques experiences faites par M. *Parent*, par lesquelles il prétend appuïer l'opinion qu'il a, que l'air n'a point de ressort: il me parut que la matiere étoit assez de conséquence pour ne me pas rendre aux raisonnemens ni aux experiences de M. *Parent*, sans l'avoir examinée de nouveau: Car il faut bien remarquer une

* Juillet 1709.

une chofe à laquelle on ne fait peut-être pas affez d'attention; c'eft qu'on eft fujet à tomber dans l'erreur lorfqu'on veut établir fes Conclufions fur une experience ou deux, qui auront réüffi conformément à nos idées, fur tout quand il s'agit de détruire un fentiment reçû par les Efprits du premier ordre, fondé fur un grand nombre d'experiences, & confirmé par des raifonnemens folides.

Je me fuis donc déterminé à réïterer les experiences de M. Parent, & à les accompagner de plufieurs autres qui pourront fervir à éclaircir la matiere. Mais avant que de les rapporter, il eft bon de tranfcrire ce qu'en a dit M. *Fontenelle*. Le voici. *Une experience finguliere & fort furprenante s'accorde avec cette penfée ou plutôt la prouve. M.* Parent *a pris plufieurs petites phioles de verre rondes, d'environ un pouce de diametre, avec un col fort long comme* 8 *à* 10 *pouces, & large d'une ligne. Il a mis dans chacune de ces phioles une liqueur differente & en affez petite quantité, de l'eau, du vin, de l'efprit de vin, de l'huile de tartre, de l'huile de petrole, du mercure: Enfuite il a fait entrer leur col dans un trou fait au Recipient d'une machine pneumatique, il a pompé l'air, après quoi il a fondu avec la lampe la partie du col qui étoit en dehors, en la tortillant, & auffi-tôt le poids de l'air environnant l'a fcellée hermetiquement, de forte qu'on étoit fûr que toutes ces Phioles étoient bien vuides d'air. Il y en avoit en même temps d'autres toutes pareilles, & bien fcellées auffi, où l'on avoit laiffé tout l'air qu'elles pouvoient contenir. On mettoit les unes & les autres fur les charbons ardens; celles qui étoient pleines d'air,*

d'air, & qui par la grande augmentation que la chaleur causoit à sa force de ressort, auroient dû crever avec grand bruit, ne faisoient que se fondre paisiblement par cette ouverture. Celles au contraire qui ne contenoient point d'air, mais seulement un peu de liqueur faisoient toutes une grande détonation, & sautoient en éclats. Que devient dans ce phénomene le ressort de l'air? Il paroît que la matiere étherée introduite par le feu dans les phioles ne pouvoit pas faire contre leurs parois interieures un aussi grand effort par le moyen des particules de l'air, subtiles & déliées comme elles le sont, que par le moyen des particules plus massives de ces autres liqueurs.

Par-là on expliqueroit fort aisément pourquoi l'humidité augmente à un si haut degré les effets qu'on attribuoit au ressort de l'air. On ne seroit plus en peine de savoir comment ce ressort peut agir dans de grandes rarefactions, où il ne semble pas que les parties de l'air puissent se toucher ni s'appuier les unes sur les autres. Mais nous étendrions peut-être les conséquences plus loin qu'il ne nous est permis presentement, il y a pour les veritez de Physique une certaine maturité, que le temps seul peut leur donner. Voici maintenant mes experiences.

J'ai fait faire d'abord par le Sieur *de Ville* Emailleur, quatre petites phioles de verre à long col, semblables à celles de M. *Parent*, & préparées de la même maniere. La 1re étoit pleine d'air grossier : la 2e vuide d'air grossier : la 3e pleine d'air grossier avec une petite quantité d'eau commune : la 4e étoit vuide d'air grossier, & où il y avoit aussi une très-petite quantité d'eau. Elles étoient toutes scellées hermetiquement. Les ayant mi-

ſes les unes après les autres ſur les charbons ardens, voici ce qui eſt arrivé. Celle où il n'y avoit que de l'air groſſier, & qui a été quelque temps ſans faire ſon effet à cauſe qu'elle étoit un peu plus épaiſſe que les autres, s'eſt ouverte par un endroit qui s'eſt un peu allongé auparavant, & on a entendu une eſpece de ſifflement cauſé par l'air qui en eſt ſorti ſans un bruit éclatant. La 2e a fait à peu près le même effet: le ſifflement a été un peu plus fort; la partie de la phiole la plus échauffée s'eſt allongée un peu davantage & a cedé plus promptement. La 3e a fait en fort peu de temps une grande détonation & a ſauté en éclats fort petits. La 4e a auſſi crevé avec bruit & fort promptement, quoiqu'il ne s'y ſoit fait qu'un petit trou.

J'ai enſuite fait faire quatre autres petites phioles ſemblables aux précedentes. La 1e qui étoit pleine d'air a demeuré aſſez long-tems ſur les charbons ſans faire ſon effet, puis elle a crevé avec aſſez de bruit en s'allongeant, & il s'y eſt fait un aſſez grand trou.

La 2e qui étoit auſſi pleine d'air, a fait à peu près le même effet, mais avec moins de bruit, l'endroit par où elle a crevé, s'eſt plus allongé, & le trou étoit plus petit.

La 3e & 4e qui étoient vuides d'air groſſier, ont rentré en dedans ſans crever, ſur tout la 4e, de maniere que la moitié de la convexité qui touchoit les charbons, s'eſt appliquée aſſez exactement ſur l'autre moitié, & ne compoſoit plus qu'un hemiſphere creux. Il paroît que c'eſt-là ce qui doit toûjours arriver dans cette experience, parce que l'air exterieur, quoi que très-dilaté par la chaleur, doit preſſer

presser plus fort, que l'air subtil du dedans ne lui résiste, & obliger ainsi la partie la plus échauffée de la phiole de rentrer en dedans. Et si cela n'est pas arrivé dans la premiere experience semblable, c'est apparemment parce qu'il étoit resté assez d'air ou de quelque autre matiere dans la phiole pour la faire crever.

N'étant pas encore content de ces experiences, j'ai fait faire quinze autres petites phioles semblables aux précedentes, dont voici le détail avec les effets que le feu a produits.

La 1e étoit pleine d'air naturel : l'aïant mise sur les charbons, elle s'est cassée en morceaux en fort peu de temps avec un peu de bruit : ce qui n'étoit pas arrivé dans les premieres experiences semblables.

La 2e étoit vuide d'air grossier : elle s'est fonduë sans crever, & s'est changée en hemisphere creux comme ci-devant.

La 3e étoit pleine d'air avec un peu d'eau ; elle a crevé avec grand bruit en peu de temps.

La 4e étoit vuide d'air avec un peu d'eau ; elle a crevé en peu de temps, & le bruit a été un peu plus fort que celui de la précedente.

La 5e étoit pleine d'eau : elle est demeurée fort peu de temps sur les charbons, qu'elle a jettez de tous côtez en crevant avec un très-grand bruit.

La 6e étoit pleine d'eau vuidée d'air : le col s'est cassé, & a fait une espece d'Eolipile qui a duré assez de temps, & quoique le feu fut fort ardent, la phiole n'en a reçû aucun changement.

La 7e étoit vuide d'air avec un peu d'esprit de vin coloré : elle a crevé presque aussi-tôt qu'elle a été mise sur les charbons avec assez de bruit.

 La

La 8e étoit pleine d'air avec un peu de ſel marin en poudre: elle s'eſt fonduë, & il s'y eſt fait un petit trou avec bruit.

La 9e étoit pleine d'air avec un peu de ſalpêtre: il s'y eſt fait un petit trou en très-peu de temps avec un peu de bruit.

La 10e étoit pleine d'air avec un peu d'urine: elle a crevé en peu de temps avec aſſez de bruit.

La 11e étoit vuide d'air avec un peu d'eau ſalée: elle a crevé avec un fort grand bruit & en peu de temps.

La 12e étoit vuide d'air avec un peu d'or fulminant: elle a crevé preſque auſſi-tôt qu'elle a été miſe ſur les charbons avec un peu de bruit.

La 13e étoit vuide d'air avec un peu de ſoufre: elle s'eſt fonduë, & a rentré en dedans ſans crever, le ſoufre s'eſt auſſi fondu, & a monté au haut du col de la phiole.

La 14e étoit pleine d'air avec un peu d'huile de lampe: elle a demeuré aſſez long-temps ſur les charbons, puis elle a crevé avec un aſſez grand bruit.

La 15e étoit vuide d'air avec une goute de mercure d'une ligne de diametre ou environ: elle eſt demeurée ſur les charbons pendant trois minutes ſans recevoir aucun changement. Quand elle a été refroidie, on l'a remiſe ſur le feu pendant 7 ou 8 minutes ſans produire aucun effet, le mercure ſe tenant toûjours au haut du col. On y a ſeulement apperçû une petite felure.

Il paroît que toutes ces experiences, bien loin de détruire le reſſort de l'air, ſervent plûtôt à l'établir. Mais il ſemble auſſi que la dilata-

latation ni le ressort de l'air enfermé, ne sont pas la cause immédiate du bruit, & de l'éclat des parties du verre, puisque quelques-unes des phioles qui ont été remplies d'air, ont crevé sans faire de bruit; dont la raison est que la force du ressort de l'air aussi-bien que des autres corps, ne consistant que dans le débandement de ses parties, & poussant également de tous côtez, & cela successivement & uniformement, à proportion de l'action de la matiere subtile dans ses pores, cette force se distribuant sur toutes les parties de la phiole où il est enfermé, celle qui est la plus échauffée venant à se fondre, cede & donne passage à l'air qui sort à peu près de même, que celui d'une Eolipile: Car ne se dilatant pas assez promptement, il ne brise pas les parois de la bouteille. Mais quand l'air est mêlé avec quelques autres parties de matiere susceptibles d'un grand mouvement, & d'une dilatation prompte & subite, alors il produit le bruit que l'on entend, & met le vaisseau en pieces. L'on ne voit pas bien la mechanique de l'action de ces petites parties de matiere pour causer ce fracas. Et il faut avoüer que les moindres experiences sont souvent capables d'embarasser l'esprit d'un Physicien, qui ne reconnoît point d'autre force ni d'autre vertu dans les corps, que celle qui se tire du mouvement & de la figure de leurs parties. Mais quoique souvent l'on ne fasse que deviner, en voulant expliquer quelques effets ou quelques experiences particulieres: on ne laisse pas de reconnoître que c'est un sentiment veritablement ridicule, que de vouloir établir un Pyrrhonisme absolu dans la Physi-

que, & qu'en cette Science auſſi bien que dans plusieurs autres, on eſt réduit à cette propoſition, qu'on eſt venu à connoître qu'on ne peut rien ſavoir.

Voici encore deux experiences qui meritent d'être rapportées ici, à cauſe du rapport qu'elles ont avec les précedentes, & qui prouvent la force étonnante de la dilatation des liqueurs : à quoi ceux qui en font des experiences doivent prendre garde, de crainte d'être bleſſez. Une Eolipile ayant été miſe ſur les charbons, & le feu ayant été pouſſé un peu violemment, elle ſauta de deſſus le rechaut, & alla donner contre un pilier de table qui étoit à deux ou trois pieds de là, avec aſſez de force pour ſe boſſuër, & piroüetta encore pendant quelque temps.

La ſeconde experience a été faite à l'Academie *del Cimento*. On a pris un tuyau de verre long d'un pied & demi ou environ, dont les extremitez ſe terminoient en boule d'une égale capacité : une de ces boules étoit ouverte comme ſi le tuyau étoit prolongé en paſſant au travers. On a verſé dans le tuyau une quantité d'eau de vie ſuffiſante pour remplir la boule inferieure & la moitié du tuyau : puis on a ſcellé hermetiquement l'ouverture de la boule ſuperieure. L'on a plongé le tout dans un vaiſſeau plein d'huile, que l'on a fait bouillir ſur le feu en ſoufflant continuellement ſur les charbons ; l'eau de vie a monté dans la boule ſuperieure, & a fait crever le tout avec tant d'impetuoſité, qu'ayant employé un vaiſſeau de cuivre au lieu d'un de verre, le fond s'eſt rompu. Et ayant employé une autre fois un vaiſſeau de fer de l'épaiſſeur d'une

d'une piastre, il s'est aussi crevé & a emporté un éclat de pierre du pavé.



REMARQUES

Sur la construction des Lieux Géometriques & des Equations.

PAR M. DE LA HIRE.

* NOUS ne trouvons pas qu'avant M. Descartes on eût donné une Methode pour la construction des Equations, par deux lieux dont les rencontres servent à en déterminer les racines, & dont il a seulement proposé quelques exemples dans sa Géometrie. On s'est appliqué depuis à expliquer cette Méthode, & il ne paroissoit pas à ceux qui en ont écrit, qu'elle dût être soupçonnée d'aucune erreur, puisqu'elle étoit fondée sur des principes si clairs & si simples, que la démonstration en étoit toute évidente & ne meritoit pas de s'y arrêter. Cependant des Geometres du premier ordre ont crû y trouver des défectuositez, & l'on est venu jusqu'à dire qu'on n'en peut imaginer aucune qui n'y soit, ce qu'on fait voir par des exemples. Enfin on a crû ces exemples si convainquans qu'un Auteur celebre souhaite une démonstration *à priori* de la cause de ces erreurs.

C'étoit aussi mon sentiment lorsqu'on publia ces exemples, & le même Auteur ajoûte

 que

* 7 Decemb. 1709.

que cette démonſtration dépendroit d'une Theorie d'Algebre fort nouvelle & fort curieuſe, & que les grands progrès que l'on fait de jour en jour, ſemblent promettre qu'on ira bientôt juſque là.

Mais il me ſemble qu'on ne doit pas accuſer de défaut une Méthode géometrique, dont l'application qu'on en fait dans quelques exemples pourroit avoir des défectuoſitez ; & c'eſt ce qui m'a engagé à reprendre cette eſpece d'étude que j'avois abandonnée depuis plus de 30 ans.

En 1678 je donnai au Public dans un petit Livre trois Traitez, le premier contenoit des Elemens des Sections coniques décrites ſur un plan par une proprieté de leurs foyers, & j'y joignis la conſtruction des Lieux & celle des Equations, où je tâchai d'expliquer ce qui s'y rencontre ordinairement : mais depuis ce temps-là il s'eſt trouvé pluſieurs cas ſur ce ſujet, leſquels ne paroiſſent pas pouvoir ſe réſoudre par les mêmes regles quoique géometriques & génerales, & c'eſt ce que j'expliquerai dans ce Memoire tant ſur la conſtruction des lieux en particulier que ſur leurs conſtructions combinées dont on tire la réſolution des Equations, ce qui ſervira de Suplément à ce que j'en ai donné autrefois.

On a toujours conſideré deux eſpeces de lieux plans, les uns à la ligne droite & les autres aux Courbes de quelque genre qu'elles puiſſent être ; mais il y a quelques-uns de ces lieux qui ne ſont pas toûjours ce qu'ils paroiſſent dans leur formule, & c'eſt ce qui pourroit les faire regarder comme de nouveaux lieux de la même eſpece, leſquels n'apportent nean-

neanmoins aucun changement aux regles generales; mais en découvrant & en expliquant ce qu'elles renferment, on vient à résoudre des difficultez qui pouvoient faire croire que les régles étoient défectueuses.

On sait que les Lieux géometriques plans ne sont que des lignes droites ou courbes tracées sur un plan, & dont tous les points sont déterminez par l'extrémité d'une ligne droite qui peut changer de grandeur, & qui fait un angle constant avec une autre ligne droite qu'elle parcourt par son autre extrémité, & cette seconde ligne qui est parcouruë par la premiere peut être considerée indéfinie d'un côté & d'autre, mais elle a un point fixe qu'on appelle l'origine du lieu. J'avois appellé cette seconde ligne la *Tige* du lieu, & la premiere dans ses differentes positions sur la seconde en la parcourant les *Rameaux* du lieu. On a aussi appellé depuis les parties de la Tige, les *Abscisses*, & les Rameaux les *Ordonnées*.

Ce sont ces parties de la Tige ou Abscisses, & ces Rameaux ou Ordonnées qui changent de grandeur pour chaque point du lieu, & ce sont ces deux especes de lignes qui sont les indéterminées de l'équation qui détermine la nature du lieu par leur raport entr'elles & à d'autres quantitez connuës qui sont mêlées dans l'équation; & comme toute équation se peut résoudre en une analogie qui contient deux raports semblables, on peut dire que les indéterminées d'un lieu ont dans toutes leurs grandeurs differentes, un rapport entr'elles qui s'exprime toûjours de la même maniere. Ainsi lorsque les lieux sont entiers & parfaits, ils doivent contenir toutes les differentes gran-

deurs des indéterminées entr'elles, lesquelles peuvent s'exprimer par la même équation, soit que ces grandeurs soient affirmatives ou negatives.

DE LA CONSTRUCTION DES LIEUX & premierement des Lieux simples.

Je parlerai premierement de la Construction des Lieux simples, qui sont ceux qu'on ne peut exprimer ni réduire à un moindre nombre de termes, comme $aay = x^3$. $aa = xx + yy$. $xxy = a^3$ &c. Car c'est par leur moyen qu'on peut construire les Composez.

Il y a plusieurs manieres de faire les réductions des Lieux composez aux simples ; les réductions lineaires sont fort simples, mais les réductions par d'autres courbes demandent quelquefois encore de nouvelles réductions. Les Exemples suivans nous en fourniront des modéles.

Je supposerai dans tous les Exemples que les angles des deux indéterminées qui forment le lieu, seront droits, quoiqu'on les puisse faire pour l'ordinaire tels qu'on voudra.

I. EXEMPLE.

* Si l'on propose pour équation d'un lieu $ay = xx$, on sait que c'est la parabole quarrée ou la premiere parabole *BAC* dont les $AO = +y$, les $OC = +x$, les $OB = -x$, & le parametre $= a$, l'origine du lieu étant en *A* ; car $-x$ quarré fait aussi-bien $+xx$ que $+x$, & l'on ne peut point prendre des $-y$ sur *OA* pro-

* FIG. I.

prolongée au-delà de A ; car on auroit $-ay$ qu'on ne pourroit pas égaler à $+xx$ pour rendre l'equation du lieu.

II. EXEMPLE.

Mais ſi l'on propoſe le quarré de l'équation précedente ſous cette forme $aayy = x^4$ qui eſt une parabole quarrée-quarrée, nous trouverons que c'eſt la même que la premiere ou la précedente, mais qui eſt doublée au deſſus du ſommet A & ſur le même axe: car premierement il eſt évident que le Quarré-quarré de OC ou $FE = +x$; & de OB ou $FD = -x$ feront auſſi $+x^4$, & que le quarré de $+ay$ ou $-ay$, c'eſt à dire de $a =$ parametre par AO ou AF ſera auſſi $+aayy$.

III. & IV. EXEMPLE.

Des deux paraboles cubiques ſimples celle dont l'équation eſt $aay = x^3$ n'eſt que la moitié de la parabole quarré-quarrée qui va d'un côté de l'axe de C en A & paſſe de l'autre de A en D; car $aa \times +y = AO$ ſera $+aay = +x^3$ qui eſt CO, & $aa \times -y$ qui eſt AF ſera $-aay = -x^3$ qui eſt le cube de $FD = -x$, & cette équation $-aay = -x^3$ eſt auſſi $+aay = +x^3$ qui eſt la propoſée.

Mais l'autre parabole cubique dont l'équation eſt $+ayy = +x^3$ ne peut être que CAE moitié encore de la parabole quarré-quarrée, mais priſe d'un même côté de l'axe, ce qui eſt facile à voir : car $+x^3$ ne ſauroit jamais être produit par $-x$, quoique $+ayy$ puiſſe être produit par $+$ ou $-y$.

V. & VI. EXEMPLE.

Les deux paraboles cube-cubes $a^4yy = x^6$ & $aay^4 = x^6$, qui ont pour leurs racines les deux précedentes, ne sont que la même & qu'on peut considerer comme formées chacune par celles de leurs racines doublée des deux côtez de l'axe qui ne sera aussi que la simple repetée au-dessus & au-dessous du sommet, comme la quarré-quarrée. Ce qui est facile à connoître par les produits des signes de leurs termes, comme on a fait pour les précedentes.

VII. EXEMPLE.

Mais pour la parabole $a^3y^3 = x^6$ dont la racine cubique est $ay = xx$, elle ne peut être que la premiere parabole *BAC* qui est sa racine, comme on le connoîtra facilement par les signes qui doivent préceder les valeurs des indéterminées, en suivant ce qui vient d'être expliqué.

Les constructions de ces paraboles ne sont pas toûjours composées à proportion de l'élevation des inconnuës de l'équation, comme celles dont l'équation est $a^5y = x^6$ ou $ay^5 = x^6$; car elles n'ont pas d'autre forme que la premiere *BAC*, puisque $+$ ou $-$ x donnera $+x^6$, & seulement $+y$ peut fournir l'autre terme avec le signe $+$ ou affirmatif.

Ce sera la même chose pour les autres paraboles $ay^3 = x^4$ ou $a^3y = x^4$. Mais pour $ay^4 = x^5$ elle retombe à la forme de la cubique *CAE*, & $a^4y = x^5$ revient à l'autre cubique *CAD*.

CAD. Il sera fort aisé de connoître la figure de toutes ces sortes de paraboles à quelque degré qu'elles soient élevées en examinant le produit des signes de leurs termes comme on a fait pour les précedentes.

Je ne m'arrêterai pas à expliquer la construction des équations des lieux $aa = yy + xx$ qui est à l'Hyperbole équilatere ; car elles sont trop connuës ; non plus que celles des Ellipses & des autres Hyperboles simples.

VIII. Exemple.

* Mais si l'on propose ce lieu $a^3 = y^3 + x^3$ qui a la forme d'un lieu au cercle & qui n'en sauroit être un, on voit que pour le construire, il en faut déterminer tous les points *D* sur les $CO = y$ comme déterminées ; car alors on aura l'équation $a^3 - y^3$, ce qui sera donné ou connu $= x^3$, & ce qui se peut faire dans quelques cas par la Geometrie ordinaire où l'on pourra trouver quelques abregez pour l'expression de tous les y, & dans d'autres par les constructions des équations.

Ce sera la même chose pour cette forme d'hyperbole équilatere dont l'équation seroit $y^3 - a^3 = x^3$, & pour toutes les autres équations semblables qui auront la forme des Ellipses & des hyperboles, à quelque degré qu'elles soient élevées, & pour toutes leurs differentes racines.

IX. Exemple.

† L'équation $xy = aa$ est à l'hyperbole entre

* Fig. II. † Fig. III.

tre ses asymptotes, ce qui est très-connu: mais les autres plus composées qui ont la même forme sont differentes comme $xxyy = a^4$. Car l'équation $yx = aa$ convient aux hyperboles opposées *IB*, *EH* entre leurs asymptotes *FG*, *AD*, ce qui est évident. Mais le quarré des deux termes de cette équation $yyxx = a^4$ fera les mêmes hyperboles conjuguées ou les mêmes repetées dans les quatre angles des asymptotes. Ainsi la racine de cette équation quarré-quarrée ne donneroit que partie du lieu. Ce qui est évident, puisque $CG \times GK$ seroit $-yx = + aa$, ce qui ne se peut égaler; mais son quarré seroit $+yyxx = +a4$ aussi-bien que $CA \times AB + yx = + aa$ dont le quarré seroit $+yyxx = a4$.

X. EXEMPLE.

Mais l'équation $yyx = a^3$ n'aura la forme ni de l'une ni de l'autre des deux hyperboles précedentes; mais seulement celle de la moitié des conjuguées comme *K* & *I* qui sont d'un même côté d'une des asymptotes comme *AD*, car *CA* quarré ou *CD* quarré sera toûjours $+yy$, qui étant multiplié par *AB* ou $DK = +x$ donnera $+yyx = a3$, ce qui ne peut pas être pour les hyperboles *EH* ou *LM*, car on auroit pour celles-ci $-yyx = +a3$.

Si l'on avoit $y3x = a4$, on verra que la forme sera celle des hyperboles opposées *IB*, *EH*.

Mais si l'on proposoit le lieu $y4xx = a6$ qui a pour sa racine la précedente $yyx = a3$, on trouvera que ce seront des hyperboles conjuguées qui seront le lieu. On

On trouvera de même que cette espece d'équation de lieu à quelque degré qu'elle soit élevée, se réduira toûjours à l'une de celles que nous venons d'expliquer.

DE LA CONSTRUCTION des Lieux composez.

Il y a des constructions de lieux composez qui se réduisent par des lignes droites & d'autres par des Courbes. Ceux qui se réduisent par des lignes droites ne changent pas la figure ou la nature du lieu quand on veut changer l'angle que font les inconnuës entr'elles, & ce sont de ces sortes de réductions dont j'ai parlé assez au long dans mon Traité des Lieux. Mais pour les réductions par des Courbes, le lieu change de nature, car il arriveroit que la tige du lieu seroit une ligne courbe, laquelle nous posons toûjours en ligne droite.

Je réduis & je construis tous les lieux composez sans avoir aucun égard s'ils conservent la nature des lieux simples desquels ils peuvent dépendre; ce qui me semble plus facile que de changer dans quelques cas la grandeur des parametres, & les raports de quelques autres lignes, puisqu'aussi-bien nous ne pouvons trouver que les points de ces lieux; & je donne seulement quelques exemples de réductions qu'on peut varier en plusieurs manieres, lesquelles doivent toûjours donner le même lieu.

RE-

REMARQUE.

On remarquera que je me ſers par tout de la ſeule lettre a pour exprimer les quantitez déterminées de l'équation ; car s'il y en a pluſieurs qui ſoient ſeules dans leurs termes, elles peuvent ſe réduire à une même, & ſi elles ſont jointes aux indéterminées, elles ne changent pas la méthode ; mais elles rendent ſeulement le calcul un peu plus long, ce que j'ai tâché d'éviter dans ce Memoire.

I. EXEMPLE.

* Soit le lieu propoſé $xx = yy + ay$.

Je poſe pour le réduire $y + \frac{1}{2}a = z$, ou bien $z - \frac{1}{2}a = y$ & ſubſtituant dans la propoſée les valeurs de y, on aura $xx = zz - \frac{1}{4}aa$ qui eſt le lieu réduit à l'hyperbole ſimple équilatere.

La conſtruction en eſt facile, car la réduction n'eſt que lineaire.

Soit $AB = a$ qui ſera l'axe de l'hyperbole ou des hyperboles oppoſées DAE, FBG, dont le centre eſt en C. Les CH feront les $+z$, & les CI les $-z$; les HE ou IG les $+x$, & les HD ou IF les $-x$. Ces deux hyperboles feront le lieu de l'équation réduite dont l'origine eſt en C.

Mais par la réduction dont on s'eſt ſervi, on aura $+z - \frac{1}{2}a$, ce qui eſt $CH - CA = AH = +y$. L'origine des y ſera donc en A, & les $AH = +y$ & les $AI = -y$. Et BH étant $= +y + a$, ſi on le multiplie par $+y$ on

* FIG. IV.

on aura $yy + ay = xx$ qui est l'équation proposée soit que l'on pose x affirmatif ou negatif. Et $AI = -y$ sera $CI = -z + CA = + \frac{1}{2}a$, ou bien $-y - \frac{1}{2}a = -z$, & l'on aura $-y - a$ par $-y$, ce qui sera $+yy + ay = xx$.

Mais si l'on propose cette autre équation $xx = yy - ay$. En prenant $y - \frac{1}{2}a = z$ pour en faire la réduction, on trouvera le même lieu réduit que le précedent; mais par la réduction on a $z + \frac{1}{2}a = y$; donc si les CH sont affirmatifs, on aura l'origine des y en B, & les BH seront les $+y$ & les BI les $-y$.

On voit par-là que ces deux équations quoique differentes sont le même lieu; mais que l'origine des $+$ & des $-y$ y est placée réciproquement.

Enfin si l'on propose cette autre équation $xx = ay - yy$, on trouvera par la même réduction que dans les précedentes, que son lieu sera au cercle $BKAL$. Car transposant on aura $-xx = yy - ay$, & posant $y - \frac{1}{2}a = z$ on aura $-xx = zz - \frac{1}{4}aa$, ou bien $\frac{1}{4}aa - zz = xx$; & par conséquent posant $CO = +z$, & la réduction donnant $z + \frac{1}{2}a = +y$, on aura l'origine des y en B & les $+y = BO$; mais dans ce cas il n'y aura point de y négatifs, à cause que l'on auroit $\frac{1}{2}a - y = -z$ ou $-y = -z - \frac{1}{2}a$, & que $\frac{1}{2}a$ sera toûjours plus grand que $-z$.

Ce sera la même méthode pour d'autres équations de la même espece que celles-ci, comme $yy - ay = \frac{1}{2}aa - xx$ pour laquelle l'origine ne sera plus à l'extrémité de l'axe.

II.

II. EXEMPLE.

Mais si l'on propose les quarrez des trois Exemples précedens, comme le premier $x^4 = y^4 + 2ay^3 + aayy$.

Et si l'on vouloit en faire la réduction à l'ordinaire, il faudroit poser $yy + ay = zz$, & l'on auroit $x = z^4 - aayy + aayy$, qui se réduiroit à $x^4 = z^4$, ou bien $zz = xx$, ou enfin $x = z$.

Mais par la réduction en substituant xx à la place de zz, on aura $xx = yy + ay$, & c'est ce qui fait connoître que cette équation est la racine de celle qui est proposée, si on ne l'avoit pas sû. On construira donc ce lieu quarré comme dans l'exemple précedent, lequel sera aussi le lieu quarré-quarré proposé à l'hyperbole.

Pour ce qui est des deux autres lieux $xx = yy - ay$ & $xx = ay - yy$, il est facile à voir que leurs quarrez seront le même, savoir $x^4 = y^4 - 2ay^3 + aayy$. Ainsi ce lieu est le cercle *AKBL*, & les hyperboles opposées tout ensemble *DAE*, *FBG*, le cercle étant construit sur le même axe que les hyperboles, quoique l'un ait pour sa racine le lieu à l'hyperbole, & l'autre celui au cercle.

Pour les Ellipses & pour les hyperboles non équilateres ce sera la même chose que pour les autres ; car elles n'en sont differentes qu'en ce que le rapport des inconnuës n'est pas un rapport d'égalité, mais un autre tel qu'on veut & neanmoins constant.

III.

III. EXEMPLE.

L'équation d'un lieu étant proposée $x^3 = 2aay - ayy$.

Je divise d'abord par a & j'aurai $\frac{x^3}{a} = 2ay - yy$ ou $- \frac{x^3}{a} = yy - ay$. Pour réduire je prens $2ay - yy = zz$, qui est le lieu au cercle dont le rayon est $= a$ comme nous avons vû ci-devant; ou bien en posant $y - a = v$ ou $a - y = -v$.

* Pour la construction du lieu, soit pris sur la ligne droite FG la grandeur $AD = 2a$, & sur AD comme diametre soit décrit le cercle APD, & sur les AD en allant vers G soit les $AO = y$. Il est évident que le cercle APD est le lieu au cercle $2ay - yy = zz$ & qui doit être par l'équation proposée $= \frac{x^3}{a}$ & par consequent $azz = x^3$.

Mais pour connoître les x^3 qui doivent être posez sur les $OP = z$ pour former le lieu, nous venons de trouver que $azz = x^3$, & cette équation est un lieu à une parabole cubique simple dont le Parametre $= a$.

Soit cette Parabole BH dont l'abscisse $BI = z$, & par le point I l'ordonnée ou le Rameau IH lequel sera $= x$: si l'on transporte donc sur OP cette grandeur IH en OR; & qu'on trouve de même pour toutes les OP ou BI, les grandeurs IH qui leur répondent, on aura tous les points R qui formeront le lieu proposé $ARRD$.

Il

* Fig. V.

Il eſt évident que cette courbe *ARD* eſt toute hors le demi-cercle *APD* hormis aux points *AD* où elle le touche, & à l'extrémité du diametre *S* qui eſt perpendiculaire à *AD*; & que cette courbe tient plûtôt du cercle que de la parabole, comme il ſemble que le marquoit ſon équation, puiſque ſes touchantes en *A* & en *D* ſont perpendiculaires à *AD*, & que ſa touchante en *S* lui eſt parallele.

Voyons maintenant ſi le lieu propoſé ne s'étend pas plus loin que la courbe *ARD*. On aura auſſi dans le cercle *ASD* les ordonnées $OQ = -z$, ce qui donnera encore $2ay - yy = zz$, d'où l'on aura de même que ci-devant $azz = x$. Et par la parabole cubique nous déterminerons la grandeur de ces x par rapport à ces z : mais nous ne pourrons pas prendre les x négatives ſur OQ, car nous aurions $-x3 = 2aay - ayy$, ce qui n'eſt pas l'équation propoſée ; ainſi la Courbe ne paſſe pas au-deſſous de *AD*.

Mais ſi nous prenons les $AG = y$ ſur *AD* prolongée, nous aurons $AG \times GD$, ce qui ſera $yy - 2ay = zz$, qui eſt un lieu à l'hyperbole dont les ordonnées ſeront les $+z$ d'un côté & les $-z$ de l'autre, & par conſéquent $azz = -x3$: car par l'équation on a $-x3 = ayy - 2aay$. Mais dans ce cas les *AG* étant plus grandes que a, la partie de l'équation $ayy - 2aay$ ſera affirmative qui ne peut pas être égalée à $-x3$ qui eſt négative : donc le lieu *ARD* ne s'étend pas au-delà de *D*, ni de l'autre côté au de-là de *A* vers *L*.

IV.

IV. EXEMPLE.

Cet Exemple sera le même que le précedent hormis seulement que chaque partie de l'équation est élevée au quarré, laquelle sera $x^6 = 4a^4yy - 4a^3y^3 + aay^4$.

Pour construire cette équation il la faudra réduire en divisant d'abord par aa, ce qui fera $\frac{x^6}{aa} = 4aayy - 4ay^3 + y^4$.

Et ensuite posant $yy - 2ayy = zz$, on trouvera toute l'équation réduite à $x^6 = aaz^4$, dont la racine sera $x^3 = azz$ qui est la même que celle de l'Exemple précedent, & par conséquent le lieu que nous avons déja trouvé *DRA* y satisfera ; car le quarré auquel on a élevé les inconnuës ne peut rien changer à leur détermination de grandeur.

Mais de plus ayant pris ou posé les $AG = +y$ sur *AD* prolongée, nous avons trouvé $azz = -x^3$, ce qui ne pouvoit pas donner de points de la courbe précedente ; mais pour cette équation le quarré de chacune de ces deux parties étant affirmatif $aaz^4 = x^6$ pourra en donner, lesquels seront en *DT* dont les ordonnées *TG* seront $+x$, & les *GH* & $OQ = -x$. Ainsi la premiere courbe trouvée *DRA* n'étoit que partie de celle-ci *TDRAQH* qui doit s'étendre à l'infini des deux côtez vers *T* & *H*, ce qui est évident par la géneration ; & la courbe de ce lieu quarré du précedent est la même que celle-ci, mais de plus repetée en sens contraire de l'autre côté de l'axe, & également aussi des deux côtez du centre en *MAN* à cause des y negatifs *AL*.

V.

V. EXEMPLE.

* Soit l'équation proposée $x^3 - aax = aaz$ ou $-x^3 + aax = -aaz$. Pour faire la réduction de ce lieu, on le disposera de cette sorte $x^3 = aax + aaz$. Et prenant $x + z = y$, on aura la reduite $x^3 = aay$, qui est une parabole cubique simple qu'on construira, laquelle sera $BGAI$ sur l'axe AC, & dont le parametre sera $= a$, & par son moyen on décrira le lieu.

Soit AD perpendiculaire à l'axe AC sur laquelle on prendra les AD pour les abscisses $= x$, & les ordonnées $DB = y$.

Mais pour déterminer les z du lieu proposé, on a par la réduction $x + z = y$ ou $x = y - z$ qui n'est que lineaire, laquelle se fera en tirant par le point A la ligne droite LAG qui coupe l'angle droit CAD en deux également & qui rencontre les ordonnées DB en E. D'où il est évident que les DB étant $= y$ les DE seront $= x$, & par conséquent les $BE = z$.

Et comme il faut que les x & les z fassent un angle droit dans le lieu, il faudra transporter les $EB = z$ sur DB en DF, & le point F sera un de ceux du lieu requis.

Il est evident par cette construction que la courbe FF doit rencontrer AD au point P lorsque $AP = x$ est $= a$; car alors la ligne AE coupe la parabole AB en G où l'ordonnée par le point P la rencontre; ainsi EB dans ce point G est nulle.

Mais depuis G jusqu'en A les ordonnées com-

* FIG. VI.

comme *HL* coupent *AE* en *K* au-dessous de la courbe; c'est-pourquoi les *EB* ou *DF* qui étoient $+z$ deviennent alors $LK=-z$, qu'il faudra transporter sur *HL* en *HM* au-dessus de *AD* pour avoir les $-z$, lesquelles donneront encore l'équation proposée; ainsi nous aurons la courbe *FFPMA* pour le lieu.

Ce n'est pas tout, ce lieu se doit continuer de l'autre côté de l'axe comme la parabole cubique *BGA* qui sert à sa construction, s'y continuë aussi en *AI*; car les *AN* seront alors $-x$, ce qui sera facile à connoître. Ainsi la courbe du lieu *FPMAO* sera semblablement posée, mais renversée des deux côtez de l'axe & aussi infinie par ses deux extrémitez.

VI. Exemple.

Soit proposée l'équation d'un lieu,

$$z^4 - 4axzz + aazz + 4aaxx = 4a^4.$$

Remarque.

Toutes les réductions des équations sont toûjours beaucoup plus simples en se servant de lieux aux paraboles que de toute autre courbe, en ce que les inconnuës s'y dépriment toûjours considérablement, cependant on les peut faire indifferemment par quelle courbe on voudra. Il arrive aussi quelquefois qu'entre les lieux qu'on peut prendre par la réduction, il y en a qui paroissent composez, & qui ne laissent pas de réduire l'équation proposée à peu de termes; c'est-pourquoi il y

a beaucoup d'adresse à choisir ces sortes de lieux.

Pour réduire ce lieu proposé, pour en faire la construction, soit pris l'équation ou le lieu suivant $zz - 2ax + \frac{1}{2}aa = yy$, lequel étant quarré donnera $z^4 + 4aaxx + \frac{1}{4}a^4 - 4axzz + aazz - 2a^3x = y^4$.

Et par la substitution des valeurs de celui-ci dans celui qui est proposé, on réduira le proposé à $y^4 = \frac{17}{4}a^4 - 2a^3x$, qui est un second lieu, & par le moyen de ces deux lieux, on pourra construire celui qui est proposé ; mais pour les construire chacun en particulier, il les faut encore reduire *; mais comme ces réductions menent assez loin, nous nous servirons d'une autre.

* Pour faire la reduction de ce lieu proposé, prenons $zz = 2ar$, & introduisant cette valeur & celle de son quarré nous la réduirons à $4aarr - 8aarx + aazz + 4aaxx = 4a^4$, ou bien divisant par $4aa$, on aura $rr - 2rx + \frac{1}{4}zz + xx = aa$; & prenant $x - r = + v$, ou $r - x = \mp v$, ce qui est indifferent à cause de leur quarré qui est le même, on réduira encore à $vv + \frac{1}{4}zz = aa$, qui est un lieu à l'Ellipse, & dans cette réduction il n'y a que deux indéterminées v & z.

Mais pour construire le lieu à la parabole qu'on a prise, ce sera celui de la parabole simple, laquelle sera doublée en *LCRHCI* dont le parametre de l'axe *BCD* sera $= 2a$; les $CE = z$; & les $EP = r$.

Et pour construire celui de l'Ellipse, on pren-

* FIG. VII.

prendra sur l'axe de la parabole $CB=a$ qui sera son petit demi-axe & CA ou CV perpendiculaire à $CD=2a$ qui sera le demi-grand axe, cette Ellipse sera $ABFV$, dont les ordonnées $FE=v$ & les abscisses $CE=z$, comme dans la parabole, & ces z seront communs, l'origine de ces deux lieux étant en C. Il est évident que ces deux lieux satisfont à leur équation.

Mais dans le lieu proposé nous n'avons ni r ni v, mais des x qu'il faut trouver par leur moyen pour les joindre aux z pour former le lieu requis. Par la réduction nous avons $v+r=x$ par rapport aux z, & par la construction ce sera $FE+EP$ ou FP qu'il faudra transporter sur EF en EG, & le point G sera un de ceux du lieu, les EG étant $=+x$.

La même réduction nous montre aussi que nous aurons la courbe KR pour les $-x$ au-dessous de CV & semblable à la précédente BH, avec les deux courbes BMR & KH aussi semblables entr'elles & posées en sens contraire & qui seront formées chacune par $+x$ & $-x$.

Enfin nous formerons de la même maniere les autres parties du lieu qui seront BI, KL & BL, KI par rapport aux $-z$ pris sur CA, ce qui sera la repetition des portions de la courbe qu'on a trouvées pour les $+z$. Où l'on remarquera que ce lieu a double sommet B & K, & qu'il se termine en $HRIL$ sur les perpendiculaires à l'axe AV de l'Ellipse lesquelles sont menées par ses extrémitez A & V; car le lieu à l'Ellipse qui sert à former le proposé, n'est pas quarré-quarré, & par conséquent il n'a point de z au-delà de V & de A. Et de plus que les portions BR, BL; &

 KH,

KH, *KI* s'entrecoupent ſur l'axe *AV* en deux points où v & r deviennent égales, ce qui eſt facile à voir.

On peut trouver encore pluſieurs autres conſtructions de ce lieu, mais c'en eſt aſſez.

VII. EXEMPLE.

* On propoſe l'équation d'un lieu $y^4 - 4ay^3 + 4aayy = 63a^3x - 62a^4$.

Pour conſtruire ce lieu il en faut faire la réduction, & pour celle de la premiere partie de l'équation on viendra à $yy - 2ay$, ou $2ay - yy$, qui eſt la racine, car elle eſt quarrée, & ſi on l'égale à zz on aura $y^4 - 4ay^3 + 4aayy = z^4$, qui ſera un lieu au cercle & à l'hyperbole équilatere tout enſemble ſur le même axe $= 2a$, comme on a vû dans les lieux ſimples.

Il faudra donc poſer $z^4 = 63a^3x - 62a^4$, & en diviſant par $63a^3$ on aura $\frac{z^4}{63a^3} = x - \frac{62}{63}a$. Si nous prenons maintenant $x - \frac{62}{63}a = r$, nous aurons le lieu tout réduit à $z^4 = 63a^3r$, qui eſt une parabole ſimple quarré-quarrée dont le parametre ſera $\sqrt[3]{63a^3}$, & nous avons vû que cette parabole ne peut avoir que la forme de la 1e parabole quarrée.

Maintenant ſoit cette parabole *MN* dont les abſciſſes $MQ = z$ & les ordonnées $QN = r$; & ſi ſur le lieu à l'hyperbole & au cercle *BDPAE* où les *AG* ou *AO* ſont $= y$ & les *GB* ordonnées $= z$, on prend quelqu'ordonnée

* FIG. VIII.

née $GB=z$, & qu'on la porte en MQ ſur la tige des z de la parabole, on y aura l'ordonnée $QN=r$ qui convient à z.

Mais par la réduction $r+\frac{62}{63}a=x$; il faudra donc tirer ſur la parabole la ligne EF parallele à MQ & qui en ſoit éloignée de la grandeur $\frac{62}{63}a$; ainſi on aura $NF=x$ qu'on tranſportera ſur GB en GH, & les GH trouvez de la même maniere ſeront les x qui doivent être joints aux $AG=y$ pour former le lieu par les points H & qui ſera infini, ce qui eſt évident par ſa formation.

On voit par-là que lorſque y ſera $=2a$, alors les z ſeront $=0$, & les $r=0$, & par conſequent la courbe HH vient rencontrer en I l'ordonnée DI, & cette ordonnée DI ſera $=ME=\frac{62}{63}a$.

Enſuite ſi l'on prend un $y=AO$ ſur le diametre du cercle, on aura auſſi $OP=z$ qui nous donnera ſur la parabole un r & un x, qu'on tranſportera ſur OP en OR, & le point R ſera encore un de ceux de la courbe.

Enfin lorſque y ſera $=a$ qui eſt le rayon du cercle, la partie de la courbe IRR doit paſſer en K à l'extrémité du rayon CK perpendiculaire à AD; car alors $MQ=z=a=CK$ aura l'ordonnée r de la parabole $=\frac{1}{63}a$, qui étant joint à $\frac{62}{63}a=ME$ fait $a=CK$.

Et ſi l'on prend des $AO=y$ plus petits que AC, on aura encore les ordonnées z dans le

cercle qui donneront des points R de la courbe; car on a $2ay-yy$ qui donne toûjours l'équation quarré-quarrée proposée, ce qui fournira d'autres points R de la courbe, semblablement posez aux précedens jusqu'en L où l'ordonnée $AL=x$ sera $=\frac{62}{63}a$.

La formation de cette courbe fait connoître que sa partie IHH est convexe & $IRKL$ est concave du côté de ADG.

Mais comme on peut prendre encore des $-y$ en AS qui donneront des $SE=z$ dans l'hyperbole AE, on trouvera aussi des points F de cette courbe, lesquels seront semblablement posez aux points H de l'autre côté de CK & par rapport à l'axe AD; & parce que les x n'y ont qu'une dimension il les faudra aussi toûjours poser du même côté de AD.

VIII. EXEMPLE.

Il y a des lieux qui étant réduits ne donnent en apparence aucune ligne courbe ni droite; & je les appelle *des lieux au point*, parce que les courbes s'y réduisent en un point ou $=0$. Les Exemples nous les feront connoître plus clairement.

Soit un lieu proposé $y^4-4ay^3+6aayy-4a^3y+4aaxx-24a^3x+37a^4=0$.

Pour faire la construction de ce lieu je le reduis en prenant

$yy-2ay+aa=az$, qui est à une parabole & en le quarrant & l'introduisant dans le lieu proposé je le réduis d'abord à

$zz+4xx-24ax+36aa=0$, & divisant par 4, j'ai

$\frac{zz}{14} + xx - 6ax + 9aa = 0$, & pour le réduire encore je prens $x - 3a = v$, & j'ai le lieu tout réduit à $\frac{zz}{4} + vv = 0$, & c'est ce lieu réduit que j'appelle au point; car il n'est pas possible que deux quantitez affirmatives soient $= 0$, sans que chacune ne soit $= 0$. Aussi pour la construction on prendroit $v + 3a = x$, ou bien $3a = x$, puisque v est $= 0$.

De même puisque $\frac{zz}{4}$ est $= 0$, aussi $z = 0$, & le terme az de la premiere réduction sera $= 0$, & par conséquent $yy - 2ay + aa = 0$; mais $yy - 2ay + aa$ étant $= 0$, sa racine qui est $y - a$ sera aussi $= 0$ & $y = a$.

C'est-pourquoi si dans l'équation proposée on substituë à la place de y sa valeur a que nous venons de trouver en l'élevant aux degrez où est y, & si à la place des x on substituë aussi la valeur de $x = 3a$ élevée aux degrez de x, toute l'équation se réduit à o: ce qui fait connoître que les y sont $= a$ & les $x = 3a$.

On remarquera que ces lieux au point peuvent être de tous genres.

Je proposerai encore ici une autre équation de lieu qui est à peu près de la même espece que la précedente

$$y^4 - 4ay^3 + 10aayy - 12a^3y + 4aaxx - 24a^3x + 41a^4 = 0$$

Et pour réduire on prendra $az = yy - 2ay + aa$, & introduisant cette valeur & celle de son quarré dans la proposée & pour les x prenant $v + 3a$, on la reduira à

$zz+4az+4vv=0$, qu'on ne peut pas regarder comme un lieu, puisque un ou plusieurs termes affirmatifs ne sauroient être égalez à o. Cependant on demande les valeurs des z & des v qui produisent cette équation ou expression, lesquelles donneront les y & les x.

Pour déterminer les valeurs de z je réduis en prenant * $z+2a=t$, & j'aurai $tt-4aa+4vv=0$, ou bien, $4vv=4aa-tt$ qui est un veritable lieu à l'Ellipse laquelle soit BDA, dont le quarré du demi-axe CA soit au quarré du demi-axe CD comme 4 à 1, & le demi-axe $CA=2a$, & par conséquent $CD=a$ les abscisses $CE=t$ & les ordonnées $EF=v$.

Mais par la réduction on a $t-2a=z$. Mais l'abscisse t ne peut être tout au plus qu'égale à $2a$ auquel cas $t-2a=0=z$ & par conséquent $az=0$ & $yy-2ay+aa=0$, d'où l'on tire $y=a$.

Mais aussi dans l'équation que nous avons trouvée $zz+4az+4vv=0$, posant $z=0$ elle se réduit à $4vv=0$: donc $v=0$: & par la réduction $v+3a=x$, ce qui est $3a=x$.

On aura donc enfin les valeurs des indéterminées de l'équation proposée, lesquelles y étant substituées la réduisent à o. D'où l'on voit que cette équation n'est pas un lieu comme dans les autres exemples, mais une équation determinée sous la forme d'un lieu.

Il y a encore des équations de lieu toutes affirmatives où l'on tombe quelquefois dans un calcul, comme $xx+az=0$, ou bien $xx=-az$, & qu'on ne peut plus réduire; mais l'on ne peut pas dire que ce soient des lieux;

* FIG. IX.

lieux ; cependant on s'en peut servir, & l'on peut former la courbe, laquelle donneroit la quantité xx affirmative égale à la négative az dans sa négation, & ce seroit ici la parabole dont les abscisses seroient $-z$.

IX. EXEMPLE.

Il y a encore une autre espece de lieux qui n'ont la forme que d'une ligne droite, lesquels j'appelle *des lieux à la ligne droite réduite*, puisqu'ils sont en effet des lieux de tous genres & qu'ils en conservent toutes les proprietez, quoiqu'ils ne paroissent qu'à la ligne droite, les exemples que nous en apporterons dans la construction des équations, nous en convaincront pleinement. On peut cependant en avoir une idée, si l'on considere dans les sections du cone, que les Ellipses dégenerent enfin en Paraboles d'un côté & de l'autre à la ligne droite, comme aussi l'hyperbole dont les extrêmes sont d'un côté une parabole, & de l'autre une ligne droite qui est aussi la derniere des Ellipses, & c'est alors que les asymptotes se confondent avec l'hyperbole ou avec l'axe déterminé, ou que le parametre se trouve $=0$.

Tout lieu plan doit avoir deux indéterminées, & le lieu à la ligne droite * CB a cette formule $nx=ny$, dont les CA sont $=x$ & les $AB=y$. Et lorsqu'on regarde $y=a$ comme un lieu à la ligne droite, il est certain que ce n'en est pas un à la rigueur, puisque y est déterminée. Cependant si l'on considere m infiniment grande, alors x devient aussi infini-

* FIG. X.

niment grande; car le point *C* qui eſt l'origine du lieu, ſera à diſtance infinie, & m infiniment grande ſera à x infiniment grande dans la raiſon d'égalité, & l'équation générale du lieu à la ligne droite, ſe réduira à $y=n$, & le lieu devient la ligne droite *DF* parallele à *CA* & indéfinie des deux côtez. Ce ſera la même choſe ſi l'on conſidere n infiniment petite; car alors le lieu des x ſera la ligne droite *CA* qui étoit la tige, & qui ſera infiniment étenduë des deux côtez de l'origine *C*.

Mais on peut auſſi conſiderer ce même lieu * *CA* comme une hyperbole *IML* ſur l'axe *CA*; car on aura $m \mid n \,\|\, CA$ quarré $=xx-$ *CM* quarré $=mm \mid AI$ quarré $=yy$; d'où vient l'équation $xx-mm=\frac{myy}{n}$. Et ſi le parametre $MN=n$ eſt poſé infiniment petit, alors le terme $\frac{myy}{n}$ ne peut avoir aucun rapport aux autres; car n infiniment petite eſt à m déterminée, comme yy de quelque grandeur qu'on le puiſſe ſuppoſer, ſera à une quantité infiniment grande qui n'entre plus en comparaiſon avec les autres termes.

Ce ſera la même choſe ſi l'on poſe n infiniment grande; car le terme $\frac{myy}{n}$ devient infiniment petit.

Il faut remarquer que lorſque le lieu propoſé eſt ſimplement $x-m=0$, ce n'eſt qu'un lieu ſimple à la ligne droite; mais ſi c'eſt $xx-mm=0$, ce ſera un lieu à la ligne droite,

* FIG. XI.

te, mais qui ne laiſſe pas de conſerver les proprietez du lieu qui eſt déterminé par le degré de l'indéterminée x, comme ici celui de l'hyperbole; & par conſéquent ce lieu à la ligne droite eſt double des deux côtez de C, lequel repréſente les deux hyperboles; ce ſera la même choſe pour d'autres degrez de l'indéterminée.

Enfin ſi l'on a des équations de lieux comme $axx = byy$, ou $ax^3 = by^3$ ou &c. qui ne peuvent être que des lieux à la ligne droite; on doit remarquer que ceux dont le degré de l'indéterminée eſt un nombre pair, ſont des lignes droites à pluſieurs branches, ce qui eſt facile à connoître, & qu'on ne doit pas les confondre avec des lieux ſimples à la ligne droite; on pourroit les appeller des lieux aux *aſymptotes*, dont l'angle qu'elles font eſt une des ſections du cône, & qui ſont auſſi la derniere des ſections hyperboliques. On verra des exemples de ces ſortes de lieux dans ce Memoire & dans un autre qui doit le ſuivre.

X EXEMPLE.

Voici un autre lieu qui participe des précedens, $fxy + afy - bcx - abc = 0$, qui paroît à l'hyperbole.

Pour le réduire il faut d'abord diviſer par f, & l'on aura, $xy + ay - \frac{bcx}{f} - \frac{abc}{f} = 0$. Et prenant $x + a = z$, on aura, $zy - \frac{bcx}{f} - \frac{abc}{f} = 0$. Mais x eſt auſſi $= z - a$; c'eſt pourquoi aïant ſup-

ſubſtitué la valeur de x, on aura $zy - \frac{bcz}{f} + \frac{bca}{f} - \frac{labc}{f} = o$, qui ſe réduit à $zy - \frac{bcz}{f} = o$. Et prenant encore $y - \frac{bc}{f} = v$, on aura enfin l'équation du lieu réduite à $vz = o$, qui eſt un lieu à l'hyperbole entre ſes aſymptotes leſquelles ſont jointes enſemble, ou $v = o$, ou bien $z = o$. Et ſi l'on poſe v ou $z = o$, l'autre ne ſera point déterminée, & on la pourra prendre de quelle grandeur on voudra & même $= o$; & ſi on la poſe $= o$, par la réduction on a $z - a = x$, ou $o - a = x$.

Donc $-a$ eſt la valeur de x de ce lieu.

De même par la réduction $v + \frac{bc}{f} = y$, ou bien $o + \frac{bc}{f} = y$. Donc auſſi $y = \frac{bc}{f}$; & ſi l'on ſubſtituë ces valeurs dans le lieu propoſé, il ſe reduit à o. Donc &c.

On trouvera la même choſe, ſi aiant poſé l'une $= o$, on prend l'autre de quelle grandeur déterminée que ce ſoit.

On remarquera que ces lieux ne ſont pas proprement des lieux, mais des équations déterminées ſous la forme de lieux, puiſque les indéterminées n'y ont qu'une valeur déterminée.

DE LA CONSTRUCTION *des Equations.*

Remarques générales ſur la Conſtruction des Equations.

Quand on veut conſtruire une Equation telle

telle qu'elle puisse être, on y introduit d'abord par la regle generale, un lieu tel qu'on veut choisir; & par ce lieu qui est une équation qui renferme deux indéterminées, dont l'une est la même que celle de l'équation proposée en substituant sa valeur, on trouve un second lieu; ce que j'ai expliqué dans mon Traité, & ce qui se peut faire en plusieurs manieres. Les deux lieux étant construits & combinez ensemble, doivent donner par leurs rencontres toutes les racines de l'équation proposée, puisque chaque lieu étant parfait, contient toutes les racines possibles de son équation; & par conséquent les rencontres communes de ces deux lieux doivent donner toutes les racines ou valeurs possibles de l'indéterminée de l'équation proposée, pourvû qu'elles se trouvent dans ces lieux.

Mais il faut remarquer, que pour l'ordinaire le lieu qu'on prend pour être introduit dans l'équation proposée de plusieurs degrez, est un lieu simple, & il faut même le prendre le plus simple qu'il est possible, pour resoudre l'équation le plus simplement qu'elle le puisse être; c'est-pourquoi on est obligé, comme j'ai fait dans la méthode que j'ai donnée, d'élever ce lieu à son quarré ou cube &c. pour en faire l'introduction; & c'est principalement en cela qu'on fait une faute dans la construction de ce lieu; car si au lieu de construire le lieu composé qu'on a introduit, on ne construit que le simple, il ne pourra pas toûjours donner toutes les racines de l'équation proposée, puisqu'il est imparfait, & quelquefois il n'en donne aucune.

Il est vrai que ces lieux étant quarrez, ou

cubez &c. peuvent être les mêmes que leurs simples ; mais le plus souvent ils sont differens, comme on a vû ci-devant dans la construction des lieux..

Il arrive aussi quelquefois qu'on introduit le lieu simple dans l'équation, & qu'ensuite on l'introduit encore dans les termes où on l'a déja introduit ; ce qui fait la même chose que si l'on avoit introduit son quarré, & par consequent on doit construire le lieu quarré & non pas seulement le simple, & de même des autres puissances.

Quoiqu'on puisse prendre le lieu tel qu'on veut pour l'introduire dans l'équation proposée, il faut pourtant qu'il puisse avoir des racines égales à celles de la proposée; car si les racines de ce lieu n'avoient qu'une étenduë déterminée, comme si l'on introduisoit un cercle, & que les racines de la proposée fussent plus grandes que celle du cercle introduit, il est évident que ce lieu ne pourra pas servir à résoudre pleinement l'équation. Il en est de même, si celui qu'on introduit en produit un autre qui n'ait pas toutes les racines de la proposée ; car ce seroit la même chose que si l'on avoit introduit ce dernier, lequel auroit necessairement fourni le premier.

Cependant comme on ne connoît pas les valeurs des racines de l'équation proposée, il pourroit arriver que le lieu pris d'abord, ou celui qui en résulte par l'introduction dans la proposée, n'auroit pas toutes les racines qui y sont, & c'est en partie sur des exemples de cette nature, qu'on pourroit avancer que la Methode seroit défectueuse; mais il me semble

ble qu'on ne pourroit pas dire que ce fût un défaut de la Methode, mais seulement de l'application qu'on en fait, comme il arrive en plusieurs operations géometriques & analytiques.

Enfin on peut presque toûjours éviter cet inconvenient, si l'on introduit d'abord dans l'équation proposée, un lieu qui ait des racines depuis zero jusqu'à l'infini, & de vrayes & de fausses comme sont celles de la Parabole; & si le lieu qu'on tire de la proposée par l'introduction, a aussi des racines de toutes grandeurs & de toute espece; car ces deux lieux combinez doivent toûjours donner toutes les racines de l'équation telles qu'elles soient. Cependant il ne sera pas toûjours necessaire de prendre ces lieux dans cette condition, si celui qu'on a pris d'abord avec celui qui en résulte, donnent autant de racines qu'il peut y en avoir dans la proposée, ce qu'on connoît par le degré de l'inconnuë de la proposée. Les exemples nous en convainqueront pleinement.

Si l'on prend des lieux plus élevés que ceux qui peuvent servir à construire l'équation proposée le plus simplement qu'elle le puisse être, on pourra trouver plus de racines qu'il ne doit y en avoir, puisque chaque lieu doit donner toutes celles qui sont possibles dans son équation. Mais entre ces racines surnumeraires il pourra s'y en trouver quelques-unes & même plusieurs de repetées; mais toutes celles de l'équation, vrayes ou fausses, s'y trouveront toûjours, si elles se trouvent dans les deux lieux & dans la disposition où ils sont.

On

On dit ordinairement que le nombre des racines que l'on trouve par la conſtruction combinée de deux lieux, eſt celui du produit des degrez de la même quantité inconnuë ou indéterminée qui eſt dans ces deux lieux: mais il me ſemble plus à propos de dire, que c'eſt ſeulement le nombre des rencontres poſſibles de ces deux lieux. Car ſi l'on conſtruit une équation de trois dimenſions dont les trois racines ſont vraies & réelles, avec deux lieux dont l'indéterminée de l'un ait deux degrez ou deux dimenſions, & la même indéterminée de l'autre n'en ait qu'un ſeul, le produit de l'une des dimenſions par l'autre ne ſera que deux, & par conſéquent il ne devroit y avoir que deux racines dans l'équation, quoiqu'en effet il puiſſe y en avoir trois vrayes & réelles.

Lorſqu'on veut conſtruire des équations dont l'inconnuë a un nombre impair de dimenſions, on peut, avant que d'introduire le premier lieu, la multiplier par une racine telle qu'on voudra, qui ſera pourtant toûjours exprimée par l'inconnuë de l'équation, comme ſi c'étoit x par $x - \text{ou} + a = 0$, afin de réduire le nombre des dimenſions de l'inconnuë à un nombre pair, ce qui donne beaucoup de facilité à l'introduction du premier lieu, comme je l'ai fait dans mon Traité, & la conſtruction donnera entre ſes racines celle qu'on aura introduite: mais auſſi on pourra multiplier la propoſée par l'inconnuë toute ſeule, ce qui eſt la même choſe que ſi on la multiplioit par $x = 0$; mais pour ce cas il arrivera toûjours dans la conſtruction que les deux lieux qu'on tirera de cette équation multipliée,

pliée, se couperont dans leur origine commune qui est le point de rencontre où la racine x est égale à o.

Venons maintenant aux exemples que je prendrai les plus simples & les plus clairs qu'il sera possible, afin que les remarques qu'on doit faire sur ces constructions, soient plus sensibles & plus évidentes.

EXEMPLE I.

Soit l'équation proposée qu'il faut construire,

$$zz-10az+9aa=0.$$

Je prens pour premier lieu $ay=zz$ qui est à la parabole, & j'introduis dans la proposée à la place de zz sa valeur, j'ai un second lieu $ay-10az+9aa=0$, ou bien, $y-10z+9a=0$ qui est un lieu à la ligne droite. Ces deux lieux étant construits & combinez ensemble donneront les racines de l'équation proposée.

Mais si je prens pour premier lieu $y=a$ qui est à la ligne droite, ou bien $yy=aa$ qui est à l'hyperbole ou aux hyperboles opposées dont l'axe est à son parametre en raison infinie, on pourra l'introduire dans la proposée en trois manieres, ce qui donnera trois differens lieux.

1°. En introduisant yy à la place de aa, on aura

$zz-10az+9yy=0$, qui est un lieu à l'Ellipse.

2°. En introduisant y à la place de a, on aura

$zz-10yz+9aa=0$, qui est un lieu à l'hyperbole.

3°. En

3°. En introduisant yy à la place de aa & y à la place de a, on aura

$zz - 10yz + 9yy = 0$, qui est un lieu à la ligne droite élevée au quarré, mais qui n'a point la forme d'hyperbole.

Pour la construction du premier lieu trouvé $zz - 10az + 9yy = 0$ avec celui qu'on a pris, il faut le réduire en posant $z - 5a = v$, & l'on aura $vv - 25aa + 9yy = 0$, qui est l'Ellipse réduite dont le demi-axe $= 5a$, & le rapport de cet axe | à son parametre || est 9 | 1. Et par conséquent le demi-grand-axe | au demi-petit-axe || 3 | 1.

* Soit donc l'Ellipse *ABED* dont le centre est *C* & les deux axes *AE*, *BD* dans le rapport de 3 à 1. Mais comme le demi-grand-axe *AC* doit être égal à $5a$, il faudra construire l'Ellipse sur cet axe, & les *CO* étant $= v$, les *OQ* & *OP* seront $= y$.

Mais par la réduction nous avons $v + 5a = z$, il faudra donc prendre sur *CA* la grandeur $5a$ qui sera *CA*, & les *AO* seront $= z$, comme aussi les *AK*, & le point *A* sera l'origine du lieu.

Maintenant pour le lieu à l'hyperbole infinie, on prendra sur la ligne *FAG* perpendiculaire à *AC* les grandeurs *AF*, *AG* chacune $= a = y$, & *FG* sera l'axe de l'hyperbole ou des sections opposées, laquelle est réduite aux lignes droites *FP*, *GQ* paralleles à *AC*. On aura donc les rencontres *PQRS* de ces hyperboles & de l'Ellipse qui donneront les racines z de l'équation, dont l'une sera *FP* ou *GQ* son égale, & l'autre *FR* ou *GS* son égale.

On remarquera que dans cette construction le

* FIG. XII.

le lieu qu'on a introduit étant $yy=aa$ suppose zz indéfinie, lequel est à l'hyperbole, & que celui qu'on a tiré est à l'Ellipse; & comme une Ellipse & les hyperboles opposées peuvent se couper en quatre points, on peut trouver aussi quatre racines dans la construction, comme elles y sont effectivement, & il faut qu'entre ces quatre racines les deux de l'équation proposée y soient comprises, ce qui est évident puisque ces deux racines y sont repetées.

Mais pour déterminer la valeur de ces deux racines $=z=GQ=GS$, ou FP & FR, la construction nous donne $OQ=a$; & par l'Ellipse nous avons $1 \mid 9 \| aa \mid 25\,aa \mid 25\,aa-vv$, d'où nous tirons $25aa-vv=9aa$, ou bien $16aa=vv$; & par conséquent $v=4a$: mais $CA=5a$, donc AO ou $GQ=z=9a$, & par conséquent aussi OE ou AK ou $GS=a$, qui seront les deux valeurs de z de cette équation proposée.

Pour le second lieu que nous avons tiré $zz-10yz+9aa=0$ qui est à l'hyperbole, en introduisant seulement dans l'équation proposée $y=a$ qui est un lieu simple à la ligne droite où z est évanouïe, on le construira comme on a fait le précedent à l'exception que l'hyperbole ou les sections opposées de ce lieu, ne pourront être rencontrées par le lieu à la ligne droite qui n'est qu'une simple ligne, qu'en deux points seulement qui doivent donner les deux racines de l'équation, ce qui se trouve aussi, & dont je ne donne point de figure.

Enfin pour le troisiéme lieu $zz-10yz+9yy=0$ qui a été aussi trouvé par l'hyperbole

bole infinie, il faudra d'abord le réduire, en posant $z-5y=v$, & l'on aura $vv-25yy+9yy=0$, ou bien $vv=16yy$, & par conséquent $v=4y$ qui est le lieu à la ligne droite.

Pour la construction soit le point O sur la ligne droite * AB, dont on prendra la partie OH de quelle grandeur on voudra; & aïant mené HI perpendiculaire à OA & égale à $4OH$, on tirera la ligne OI prolongée d'un côté & d'autre, laquelle sera le lieu à la ligne droite qu'on a trouvé; car si l'on méne les AP ou BS paralleles à HI lesquelles rencontrent OI en P & en S, les OA ou OB étant y & les AP & BS étant v, on aura $1 \,|\, 4 \,||\, y \,|\, v=4y$.

Mais par le premier lieu qu'on a pris y est $=a$, & par la réduction du lieu précedent $v+5y=z$, ou bien $5y-v=z$; on menera donc OM perpendiculaire à AB & $=5a$ ou $5y$, & le point M sera l'origine du lieu & le centre des hyperboles infinies dont FM ou MG parallele à AB, & chacune $=a$ seront le demi-axe; c'est-pourquoi GB, FB seront ces hyperboles qui rencontreront le lieu à la ligne droite en S & en P, qui donneront les deux racines GS, $FP=z$ de l'équation proposée. On pourroit encore en trouver deux autres égales à celles-ci, en construisant aussi le second lieu réduit tel qu'il est $vv=16yy$, & que j'ai appellé aux *Asymptotes*.

On voit par-là que si l'on ne construisoit ces deux lieux que par de simples lignes droites, on n'auroit qu'une seule racine, au lieu des deux qui sont dans la proposée.

EXEM-

* FIG. XIII.

EXEMPLE II.

Soit l'équation proposée qu'il faut construire

$$x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0.$$

En posant pour premier lieu $az = xx - 3ax + 3aa$, qui est à une Parabole quarrée, & l'introduisant dans la proposée, on aura

$azx - a^3 = 0$, ou bien $zx = aa$ qui est un lieu à l'hyperbole équilatere entre ses asymptotes, & ces deux lieux étant construits & combinez doivent donner les trois racines x de l'équation proposée; car ces deux lieux ont toutes les conditions requises pour donner toutes les racines de l'équation.

Pour l'hyperbole * elle sera très-facile à construire; car soit ses asymptotes CL, CD & son centre en C, & le quarré CA dont le côté CB ou CG soit $= a$, l'hyperbole EAF qui passe par le point A sera celle du lieu, dont les z seront sur CD & les x seront ordonnées à CD, & l'origine en C.

Mais pour la construction de la parabole il en faut réduire le lieu en prenant $x - \frac{3}{2}a = r$, ce qui donnera d'abord $az = rr - \frac{9}{4}aa + 3aa$, ou bien $az = rr + \frac{3}{4}aa$, ou bien $az - \frac{3}{4}aa = rr$. Et prenant encore $z - \frac{3}{4}a = v$, on aura $av = rr$ qui est la parabole réduite.

Il faut donc construire cette parabole PHQ sur l'axe HI dont le sommet soit en H & le parametre $= a$, on aura ses abscisses $HI = v$ & ses ordonnées $IQ = r$.

Mais par la réduction on a $v + \frac{3}{4}a = z$; il faut donc prendre sur l'axe HI prolongé vers L

* FIG. XIV.

L la grandeur $HL = \frac{1}{4}a$, ce qui donnera les $LI = z$, & par conséquent le point L de l'axe de la parabole doit être sur l'asymptote CL de l'hyperbole.

Mais aussi par la réduction on a $r + \frac{2}{3}a = x$; c'est-pourquoi on prendra sur l'ordonnée IQ ou IP, la grandeur $IK = \frac{2}{3}a$, & l'on aura KP ou $KQ = x$.

D'où l'on connoît que si LC est $= \frac{3}{2}a$, le point L sera l'origine commune des deux lieux qui auront leurs abscisses & leurs ordonnées sur les mêmes lignes, & les rencontres de ces deux lieux doivent donner toutes les racines x de l'équation.

Premierement il est évident que le sommet H de la parabole est au dedans de l'hyperbole, car LH est $= \frac{1}{4}a$; & si de la rencontre N de l'axe de la parabole LHI & de l'hyperbole on méne NM parallele à CB, on aura $CM = z$, & par la construction de la parabole NM ou LC est $= \frac{3}{2}a$; c'est-pourquoi si l'on divise aa par $\frac{3}{2}a$, on aura CM ou $LN = \frac{2}{3}a$; mais LH est $= \frac{1}{4}a$: donc enfin le point H est au dedans de l'hyperbole.

Mais je dis que la parabole HQ rencontre l'hyperbole au point A & qu'elle doit la couper dans ce même point. Car si l'on méne AR ordonnée à l'axe HI de la parabole qui passe par le point A de l'hyperbole, on a par la construction AR ou $LB = \frac{1}{2}a$; mais aussi par la même construction HR est $= \frac{1}{4}a$, & à cause du parametre de la parabole $= a$ le quarré de son ordonnée par le point R sera $= \frac{1}{4}aa$ dont la racine égale $\frac{1}{2}a$ est la grandeur de l'ordonnée; donc le point A est commun à l'hyperbole & à la parabole; & par conséquent

AG sera une des racines x de l'équation $=a$.

Cependant il n'y a pas pour une seule racine réelle dans l'équation, il y en a trois, & on les doit trouver; car autrement on seroit porté à croire que la méthode seroit defectueuse, puisqu'elle ne donneroit qu'une seule racine dans la seule intersection des deux lieux; mais c'est dans la proprieté particuliere de cette intersection qu'on en trouve trois, ce qu'on n'avoit point encore remarqué. Ce sont de ces sortes de cas qui paroissent d'abord être des défauts de la méthode. Voici de quelle maniere je démontre que ce seul point de rencontre donne trois racines.

Si par le point A on méne une touchante AD à l'hyperbole, on sait que cette touchante AD rencontrera l'asymptote CD au point D, & que $GD=a$. Mais si par le même point A on méne aussi une touchante à la parabole, il est évident que cette touchante coupera l'axe RL en un point S, en sorte que HS sera égale à HR, & HR étant $=\frac{1}{4}a$, RS sera $=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}RL$, & par conséquent $RS=RA$: mais $AG=GD$; donc la même ligne SAD touchera la parabole & l'hyperbole au même point A où elles se rencontrent.

Mais quoique ces deux courbes étant convexes d'un même côté touchent une même ligne droite en un même point, ce n'est pas à dire qu'elles ne se coupent pas dans ce point, & effectivement elles s'y coupent. Car si l'on prend une partie indéfiniment petite $RT=i$, & menant Tfe ordonnée laquelle rencontre l'hyperbole en f & la parabole en e, on aura

Tf

$Tf = \frac{3}{2}a - \frac{aa}{a+i}$ & $Te = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ai}$, d'où l'on connoîtra que *Te* eſt plus grande que *Tf*; au contraire ſi le point *T* eſt pris entre *R* & *H*; & par conſéquent la partie *AQ* de la parabole paſſe entre l'hyperbole & ſon aſymptote qu'elle doit enfin couper, puiſque cette aſymptote ſera un des diametres de la parabole; ce ſera le contraire de la partie *AH* de la parabole qui paſſe au dedans de l'hyperbole. Ainſi ce point *A* ne devroit donner qu'une ſeule racine.

Ce cas particulier de ces deux lignes courbes qui ſe coupent en un point où elles touchent une même ligne droite d'un même côté, réünit en ce point trois rencontres des deux lignes courbes, comme le point où deux courbes ſe touchent réünit deux points de leur rencontre, & même pluſieurs ſuivant les differentes inflexions des courbes. Car ſi l'on inclinoit un tant ſoit peu la touchante de la parabole de *AS* vers *L* comme en *Aſ*, cette *Aſ* étant toûjours touchante de la parabole, & le point *A* demeurant à ſa place; il eſt évident que la parabole en s'inclinant couperoit alors la touchante *AS* de l'hyperbole, puiſque la ligne *AS* devroit entrer dans la parabole dans cette poſition; & par conſéquent auſſi la parabole rencontreroit l'hyperbole en un point au-deſſus de *A*, & elle la rencontreroit auſſi dans leur point commun *A*. Mais de l'autre côté la touchante *ſA* s'éleveroit au-deſſus de la touchante *AD* comme en *Ad*, & elle couperoit l'hyperbole; & comme la parabole ſeroit toute au deſſus de *Ad*, elle paſſera au dedans de l'hyperbole en allant vers *F*;

F; mais la parabole dans cette poſition doit encore rencontrer l'aſymptote CD, elle rencontrera donc encore la partie AF de l'hyperbole en quelque point.

Ce ſont ces trois points de rencontre qui pourroient donner trois racines differentes, & qui ſe réüniſſant dans le ſeul point A y réüniſſant auſſi les trois racines qui deviennent chacune $=a$; ce qui donne une entiere ſolution de l'équation qui contient trois racines vraïes & égales chacune à a.

La conſtruction des équations de trois degrez eſt toûjours fort ſimple par une parabole & par une hyperbole entre ſes aſymptotes, comme on vient de voir dans cet exemple. Mais ſi l'on vouloit trouver d'autres lieux par le moyen de la parabole, il faudroit multiplier l'équation par une racine comme $x-$ ou $+a=0$, ce qui l'éleveroit à un degré plus haut, d'où l'on tireroit une infinité d'autres lieux que les précedens & même le cercle, comme on le peut voir dans mon Traité: mais alors la combinaiſon de ces lieux donnera les trois racines de l'équation propoſée ſi elles ſont réelles plus celle qui aura multiplié l'équation; & ſi l'on multiplie ſeulement l'équation par x, c'eſt-à-dire par $x-0=0$, on doit trouver auſſi quatre rencontres des deux lieux; mais ces lieux ſe rencontreront neceſſairement dans leur origine commune où x racine $=0$, ce qu'on peut faire facilement ſans que j'en rapporte d'exemple.

EXEMPLE III.

Soit l'équation propoſée $zz-2az-aa=0$.

Je

Je prens pour premier lieu $aa - xx = zz$ qui eſt au cercle, & j'introduis dans la propoſée la valeur de zz, ce qui donne pour ſecond lieu $aa - xx - 2az - aa = 0$ qui ſe réduit à $-xx - 2az = 0$ qui n'eſt pas un lieu qu'on puiſſe conſtruire; d'où je connois que ce cercle ne peut pas ſervir pour donner les racines de l'équation propoſée.

Mais ſi je prens le lieu au cercle $4aa - xx = zz$, & que j'introduiſe dans la propoſée la valeur de zz, j'aurai pour ſecond lieu $4aa - xx - az - aa = 0$ qui ſe réduit à $3aa - az = xx$ qui eſt à la parabole & qu'on peut conſtruire avec le cercle; ce qui donnera les racines de l'équation.

Enfin ſi l'on prend d'abord le lieu à la parabole comme $zz = ay$, on trouvera celui à la ligne droite $y = 2z + a$ qui ont tous deux des racines de toutes grandeurs, & ces lieux étant combinés donnent les racines de l'équation.

EXEMPLE IV.

Si l'on propoſoit une équation dont tous les termes fuſſent affirmatifs comme $xx + 3ax + 2aa = 0$,

Laquelle ne peut pas être une équation, mais qu'on voulût trouver les valeurs de x, ou, ſi l'on veut, les racines qui doivent être toutes négatives comme les ſignes le font connoître, leſquelles par leur multiplication donnaſſent cette équation ou expreſſion propoſée.

Il faut la conſiderer comme une veritable équation, & commencer à la conſtruire à l'or-

l'ordinaire, en prenant un lieu $ay = xx$ à la parabole, & y introduisant la valeur de xx, on aura un second lieu qui sera $ay + 3ax + 2aa = 0$, ou bien $y + 3x + 2a = 0$, & posant $y + 2a = v$, on aura $v = -3x$: d'où l'on tire cette analogie $3 \mid 1 \parallel v \mid -x$ qui est à la ligne droite.

Si l'on construit donc la parabole * ABD dont le parametre $= a$, les AE seront $= y$, & les $DE = +x$ & les $EB = -x$, elle satisfera au premier lieu.

Pour le lieu à la ligne droite, on prolongera l'axe EA en O en faisant $AO = 2a$, d'où les $OE = v$; ensuite on tirera AF perpendiculaire sur l'axe AE, & l'ayant faite $= \frac{2}{3}a$, on tirera la ligne OFG qui sera le lieu requis à la ligne droite dont les abscisses $OI = v$ & les ordonnées $IL = -x$, car on leur donne le signe $-$ comme ils l'ont dans la parabole. Mais cette ligne OF doit necessairement rencontrer la parabole en deux points LG & les ordonnées par ces points LI, $GH = -x$ de la proposée, & il est très-facile de connoître par la construction dans cet exemple, que $LI = a$ & $GH = 2a$; & par conséquent $x + a = 0$ & $x + 2a = 0$, qui sont les deux produisans de cette expression ou équation proposée.

On pourroit encore par la méthode de M. *Descartes* changer les racines fausses de l'équation en vrayes, en changeant les signes devant les termes pairs, & ensuite résoudre l'équation à l'ordinaire, dans laquelle les racines vrayes qu'on trouveroit, en seroient les fausses.

 EXEM-

* FIG. XV.

EXEMPLE V.

Soit l'équation proposée $x^6 - 63a^5x + 62a^6 = 0$.

Si l'on prend pour premier lieu $az = xx$, & l'ayant cubé ce qui sera $a^3z^3 = x^6$, & qu'on l'introduise dans la proposée ; on aura $a^3z^3 - 63a^5x + 62a^6 = 0$, ou bien en réduisant ; $z^3 = 63aax - 62a^3$ qui est une parabole cubique. Puisque l'on a introduit dans la proposée le lieu cubique $a^3z^3 = x^6$, c'est aussi celui qu'il faut construire ; mais par la construction des lieux, ce lieu ne sera que la premiere parabole qu'on construira facilement sur son parametre a.

Pour le second lieu qu'on a tiré de l'équation, il faut le réduire en prenant $x - \frac{62}{63}a = t$, on aura ce lieu réduit à $z^3 = 63aat$, qui est une parabole cubique, dont le parametre est $\sqrt{63aa}$. Et si l'on construit ces deux lieux suivant la regle, ils se couperont seulement en deux points lesquels donneront deux valeurs de x affirmatives, l'une sera $x = a$ & l'autre $x = 2a$ qui seront les deux seules racines de cette équation.

Maintenant si l'on propose de construire cette même équation $x^6 - 63a^5x + 62a^6 = 0$, en posant pour premier lieu $x^3 - 2aay + ayy = 0$, ou $x^3 = 2aay - ayy$, mais qu'il faut quarrer pour l'introduire dans la proposée, & qui sera $x^6 = 4a^4yy - 4a^3y^3 + aay^4$:

Ayant donc substitué la valeur de x^6 dans la proposée, on aura le second lieu,

$4a^4yy - 4a^3y^3 + aay^4 - 63a^5x + 62a^6 = 0$, lequel se réduit à

4aayy

$4aayy - 4ay^3 + y^4 - 63a^3x + 62a^4 = 0.$

Il ne reste donc plus qu'à construire ces deux lieux pour les combiner, dont le premier qui a été introduit est cube-cube, & le second que l'on a tiré est quarré-quarré, & ils ont tous deux la forme de parabole : mais je n'en fais point ici la construction ; car pour le premier je l'ai donnée dans le 4e Exemple de la Construction des lieux composez ; & pour le second, c'est le 7e Exemple.

On verra d'abord que ces deux lieux combinez ensemble suivant la regle qui ne consiste qu'à les poser de telle maniere que leur origine soit commune & que leurs indéterminées de même nom soient dans chacun sur la même ligne droite ou paralleles entr'elles, donneront les deux racines de l'équation proposée, mais qu'ils les donneront repetées.

EXEMPLE VI.

Soit l'équation qu'il faut construire,

$x^4 - a^3x - \frac{1}{2}a^4 = 0.$

Je prens d'abord $ay = xx$ qui est un lieu à la parabole, & quarrant j'aurai $aayy = x^4$, & substituant dans l'équation proposée la valeur de x^4, on aura $aayy - a^3x - \frac{1}{2}a^4 = 0$, ou bien $yy = ax + \frac{1}{2}aa$, qui est aussi un lieu à une parabole.

* Le premier lieu qu'on a posé est facile à construire, puisque ce n'est que la parabole quarrée qui est sur le même axe & repetée au dessus du sommet, comme on a vû dans les lieux ; car c'est cette parabole quarré-quarrée qu'on a introduite dans l'équation proposée.

 Pour

* FIG. XVI.

Pour la seconde parabole il faut la réduire en posant $x + \frac{1}{2}a = t$, & l'on aura $yy = at$.

Soit donc sur l'axe *KAG* la parabole quarré-quarrée du premier lieu *DABEF*. Et par le sommet *A* ayant mené *AM* perpendiculaire à *GA* & $= \frac{1}{2}a$, & sur *MA* pour axe & pour parametre $= a$, soit décrit la même parabole *BME*. Dans la premiere parabole les *AG* étant les abscisses $= y$ & les *BG* étant les ordonnées $= x$, & le contraire dans la seconde parabole.

Il est évident par cette construction, que ces deux paraboles se couperont dans quatre points *BDFE*, & qu'elles donneront quatre valeurs de x savoir *BG*, *DI*, *FL*, *EK* dont deux *BG*, *EK* seront égales entr'elles & les deux autres aussi égales entr'elles. Cependant cette équation n'a que deux racines réelles dont l'une est vraye & l'autre fausse, & elles se trouvent repetées à cause que les lieux de cette construction sont plus élevez qu'ils ne devroient être pour la construire simplement. Mais cherchons une autre construction.

Si à la seconde équation que nous avons trouvée $yy - ax - \frac{1}{2}aa = 0$ nous ajoûtons la premiere $xx - ay = 0$, nous aurons un troisiéme lieu $yy - ax - \frac{1}{2}aa + xx - ay = 0$, lequel sera au cercle, & qui étant combiné avec le précedent, par sa construction doit encore donner les racines de l'équation, & il les donnera toutes seules & sans repetition. Mais pour construire ce cercle il faut le réduire en posant $y - \frac{1}{2}a = z$; & $x - \frac{1}{2}a = v$, & l'on aura l'équation réduite au cercle $zz + vv = aa$.

Ces sortes de lieux tirez de la combinaison d'autres lieux, demandent des remarques particu-

ticulieres que nous ferons dans un autre Memoire ; & c'est la methode dont s'est servi M. *Sluze* pour expliquer les constructions que M. *Descartes* a données dans sa Geometrie.

* Mais si l'on veut construire ce lieu au cercle avec la parabole quarré-quarrée qu'on a introduite & dont le parametre est $=a$ comme dans l'exemple précedent ; & le sommet *A* commun, ayant mené *AH* perpendiculaire à l'axe & égale à $\frac{1}{2}a$, & *HC* parallele à l'axe & aussi égale à $\frac{1}{2}a$, le point *C* sera le centre du cercle du lieu, & son rayon $=a$. Ce cercle coupera la parabole *BAD* aux deux points *BD* qui donneront les deux valeurs de x *BG*, *DI* ou les deux racines de l'équation, comme on les a trouvées ci-devant.

Mais ce cercle coupe encore l'autre parabole *EF* qui est partie de la parabole quarré-quarrée du lieu, aux deux points *EF* qui doivent aussi donner deux valeurs de x par les ordonnées *EK*, *FL* & qui ne sont pas les mêmes que les deux autres. D'où viennent donc ces deux racines *EK*, *FL* ? Je dis qu'elles n'appartiennent point à l'équation proposée ; car si l'on cherche cette équation par la racine *BG*, on la trouvera en substituant dans sa valeur donnée par la parabole quarré-quarrée, celle qu'on tirera du cercle à l'ordinaire, & de plus en substituant encore à la place de y simple qui reste dans un des termes, la valeur de cet y trouvée par la parabole simple *DAB*, on aura l'équation proposée, ce qui fait connoître que *BG* est une des racines de l'équation. Ce sera la même chose pour l'autre racine *DI*.

* Fig. XVII.

Mais si l'on cherche l'équation proposée par la racine EK, on trouvera aussi d'abord la même valeur par la substitution de cette racine qui vient du cercle; mais pour y simple qui reste encore dans un de ses termes, il faudra le faire évanouïr par le moyen de la parabole simple EAF, laquelle donne $-ay$, ce qui donneroit l'équation $x^4 + 2aaxx - a^3x - \frac{1}{2}a^4 = 0$, qui est differente de la proposée; ce qui fait connoître que ces racines EK & FL n'appartiennent point à l'équation proposée: aussi l'inconnuë de l'équation qu'on tirera du lieu au cercle & de celui à la parabole quarré-quarrée sera élevée au 8e degré, laquelle pouvant avoir 8 racines les deux FL, EK s'y trouveront.

Enfin on peut trouver une autre solution plus simple que les précedentes. Car si l'on pose le premier lieu $x^4 = a^3y$ qui est à une parabole quarré-quarrée qui a la forme de la parabole simple, & qu'on l'introduise dans la proposée, on aura $a^3y = a^3x + \frac{1}{2}a^4$, laquelle se réduit à $y = x + \frac{1}{2}a$ qui est un lieu à la ligne droite.

* Soit la parabole BAD dont l'équation a été prise $x^4 = a^3y$, laquelle ait pour axe AG dont les parties AG ou abscisses soient $= y$ & les ordonnées $BG = x$.

Maintenant pour le lieu à la ligne droite soit pris sur l'axe la partie $AN = \frac{1}{2}a$, donc les NG seront $y - \frac{1}{2}a$; mais soit tiré la perpendiculaire AH à l'axe laquelle soit faite $= \frac{1}{2}a$, & par les points H & N soit mené la ligne droite HNB qui sera le lieu à la ligne droite de l'équation, combiné avec celui à la parabole: car

* FIG. XVIII.

car les $NG = y - \frac{1}{2}a = x$ feront aussi $= GB$. DI sera $= -x = \frac{1}{2}a - y$. On aura donc par cette construction les deux seules racines de l'équation proposée. Et c'est cette maniere de construction qu'on doit regarder comme la plus simple de toutes celles dont on peut se servir.

La construction seroit encore assez simple, si l'on posoit pour premier lieu $x^3 = aay$, car le second seroit une hyperbole entre ses asymptotes: mais cette construction n'est pas si simple que celle de la parabole $yy = ax + \frac{1}{2}aa$ avec le cercle, comme ci-dessus.

EXEMPLE VII.

Soit l'équation proposée $x^4 - 4aaxx - 2a^3x - \frac{1}{4}a^4 = 0$.

Je prens le premier lieu $x^4 = aayy$ qui est une parabole quarré-quarrée dont la racine est $xx = ay$; & ayant substitué dans l'équation proposée la valeur de x^4, on a le second lieu,

$aayy - 4aaxx - 2a^3x - \frac{1}{4}a^4 = 0$, qui se réduit à

$yy - \frac{1}{4}aa = 4xx + 2ax$, & divisant par 4 on aura,

$\frac{1}{4}yy - \frac{1}{16}aa = xx + \frac{1}{2}ax$, & réduisant en posant $x + \frac{1}{4}a = z$, on aura l'équation $zz = \frac{1}{4}y$ qui est un lieu à la ligne droite.

* Pour construire ce lieu avec la parabole quarré-quarrée qu'on a introduite d'abord, laquelle soit $BADEF$ dont le parametre $= a$ & les abscisses $AG = y$, les ordonnées $GC = x$.

Mais par la réduction on a $x + \frac{1}{4}a = z$: on me-

* Fig. XIX.

menera *AO* perpendiculaire à l'axe *AG* de la parabole & $=\frac{1}{4}a$, & le point *O* ſera l'origine des *y* ſur *OP* parallele à l'axe *AG*, & les *z* ſeront perpendiculaires à *OP* qui ſeront les *PB*.

Pour la conſtruction du lieu à la ligne droite on a $4 \mid 1 \parallel yy \mid zz$, ou bien $2 \mid 1 \parallel y \mid z$: On prendra donc ſur l'axe *AG*, la partie $AH = 2AO = \frac{1}{2}a$, & l'on menera la ligne *OH* qui ſera le lieu à la ligne droite qu'il falloit conſtruire.

Il eſt évident que cette ligne droite coupera la parabole quarré-quarrée en quatre points *BILE*, leſquels donneront quatre racines de l'équation, dont une ſeule vraye *BG* eſt égale aux trois fauſſes enſemble *IK*, *LM*, *EQ*: ce qui eſt marqué par les ſignes de l'équation. Et le produit de la racine vraye par l'une des fauſſes ſera,

$xx - 2ax - \frac{1}{2}aa = 0$, & celui des deux autres fauſſes ſera,

$xx + 2ax + \frac{1}{2}aa = 0$. Mais en réſolvant ces équations on trouvera que la vraye racine ſera $x = \sqrt{\frac{3}{2}aa} + a$, la fauſſe $x = -\sqrt{\frac{3}{2}aa} + a$, le produit de ces deux racines donnent le premier.

L'autre fauſſe $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa} - a$, & la derniere $x = -\sqrt{\frac{1}{2}aa} - a$; ce qui donne l'autre.

Cet exemple fait voir que ſi l'on n'avoit conſtruit que la parabole ſimple *BAD*, on n'auroit eu que deux racines au lieu des quatre qui ſont dans l'équation propoſée, quoique ces deux lieux ayent toutes les conditions neceſſaires pour les donner toutes quatre, & même huit.

EXEM-

EXEMPLE VIII.

Soit l'équation proposée qu'il faut construire,

$x^4 - 5aaxx + 4a^4 = 0$.

Soit pris le premier lieu $ay = xx$, ou son quarré

$aayy = x^4$ qui est à la parabole quarré-quarrée.

Et ayant substitué la valeur de x^4 dans la proposée, on aura le second lieu $yy - 5ay + 4aa = 0$.

Et réduisant ce lieu en prenant $y - \frac{5}{2}a = z$, on aura

$zz = \frac{9}{4}aa$ qui est un lieu aux hyperboles infinies, c'est à dire aux hyperboles dont $\frac{3}{2}a$ est le demi-axe & son parametre infini.

* Pour la construction soit la parabole *ABDEF* sur l'axe *AG* & dont le parametre est $= a$.

Pour le lieu aux hyperboles opposées infinies, on a par la réduction $y - \frac{5}{2}a = z$. On prendra donc sur l'axe *AG* la partie $AO = \frac{5}{2}a$, & le point *O* sera l'origine ou le centre de ces hyperboles lineaires dont le demi-axe $= \frac{3}{2}a$; c'est-pourquoi on prendra *OG* & *OK* chacune égale à $\frac{3}{2}a$, lesquelles seront $= z$, savoir $OG = +z$ & $OK = -z$; & enfin par les points *G* & *K*, on tirera les hyperboles ou lignes droites *IGH* & *DKB*, qui rencontrant la parabole aux points *HIBD* donneront les quatre racines de cette équation, savoir *GH*, *GI* chacune $= x$ une vraye & une fausse & égales entr'elles, & les deux autres *KB*, *KD*

* FIG. XX.

aussi chacune $=x$ une vraye & une fausse & égales entr'elles, qui seront les quatre racines de l'équation proposée.

Il est facile à voir par les grandeurs de *AO*, *OG* & *OK* que $GH=2a$ & $KB=a$.

On remarquera que si l'on s'étoit contenté de décrire seulement le lieu à la ligne droite *IGH* tel qu'il paroissoit par $z=\frac{1}{2}a$ racine de $zz=\frac{2}{4}aa$, on n'auroit eu que deux des quatre racines de cette équation, d'où l'on auroit pû dire que la regle étoit défectueuse.



ABREGÉ
DE CATOPTRIQUE.

PAR M. CARRÉ.

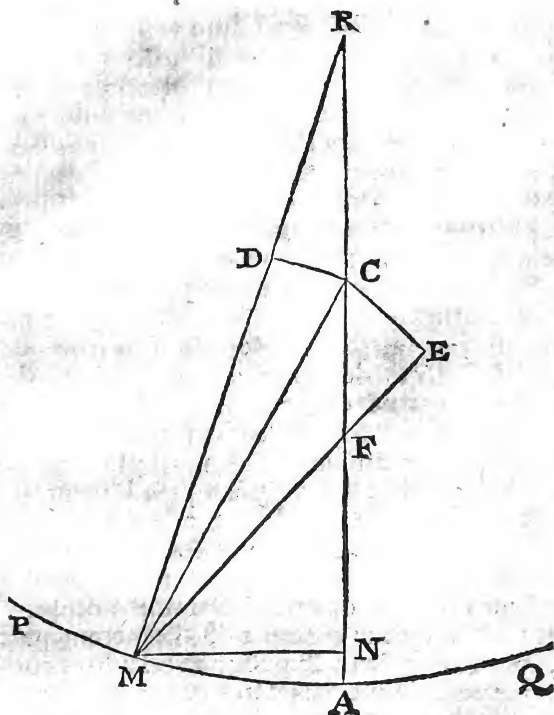
* IL y a sept ou huit ans que je composai des Abregez de Catoptrique & de Dioptrique démontrez par l'Algebre, en n'employant qu'une seule Formule generale, de laquelle je tirois par Corollaires le plus grand nombre des propositions démontrées d'une maniere fort longue par les differens Auteurs qui en ont traité. Ce fût le savant M. *Halley* qui m'en donna l'idée par la lecture d'un Memoire qui se trouve dans le Suplément des Journaux des Savans de Leipsic en 1696, & qui renferme toute la doctrine des Foyers dans les verres sphériques. Ainsi ce que j'avois fait n'étoit que pour moi & pour quelques

* 1709.

ques Amis à qui j'en avois donné copie, quoiqu'on me conseillât d'en faire un autre usage. M. *Guisnée* donna dans les Memoires de l'Academie de l'année 1704 une Methode generale pour déterminer les foyers de toutes sortes de verres de quelque courbure qu'ils fussent, qui a été fort bien reçûe: ce qui me fit penser à donner aussi ce que j'avois fait sur la Catoptrique. Mais une maladie de près de quatre années, & dont je ne sai pas si je pourrai me rétablir, m'en a empêché; ensorte que je ne pensois plus à mon Memoire. Parcourant il y a quelque temps les Journaux de Leipsic de ces dernieres années, j'ai trouvé dans le Volume de 1707 une Methode pour déterminer les foyers des Miroirs sphériques composée par un autre savant Anglois nommé M. *Ditton*, & qui suit précisément les mêmes idées que M. *Halley*; c'est à dire qu'il pose ce principe, que dans les petits angles les côtez sont en même raison que les angles ausquels ils sont opposez. Comme mon principe est un peu different & beaucoup plus simple que le sien, & que je tire d'autres conséquences, je me suis déterminé à donner ce que j'ai fait : l'Academie en fera tel usage qu'il lui plaira.

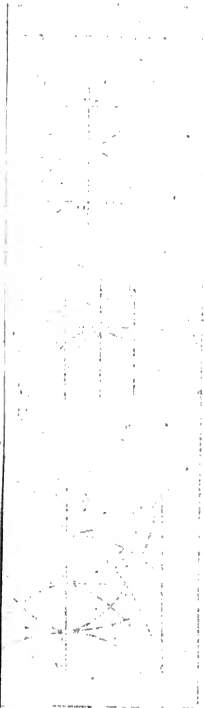
PROBLEME GENERAL.

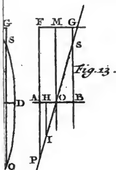
Un Miroir concave d'une courbure quelconque étant donné avec un point ou un objet *rayonnant* dans l'axe de ce miroir, trouver le point où les rayons réflechis se réünissent, & où se doit former l'image de l'objet.

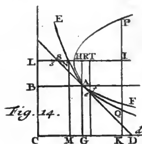


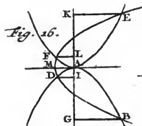
Soit une portion de Miroir concave *PQ* d'une courbure quelconque, que *RA* repréſente l'axe de ce miroir, & que *R* pris dans cet axe ſoit le point ou l'objet rayonnant, d'où partent une infinité de rayons lumineux qui tombent ſur la ſurface *PQ*; Que *RM* ſoit un de ces rayons incidens pris infiniment proche de *RA*: L'on demande le point *F* où le rayon reflechi *MF* ira couper l'axe *RA* de ce miroir.

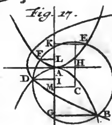
Soit

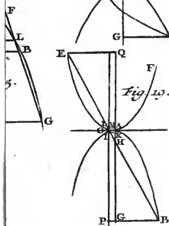


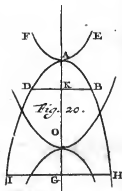

G
S
D
Q
F M G
S
Fig. 13.
A H O B
I
P


E
P
L
S
HRT
I
B
A
F
Fig. 14.
Q
d
C M G K D


K
E
Fig. 16.
F
L
M
A
D
I
G
B


Fig. 17.
K
E
F
L
H
A
D
I
M
C
G
B


F
L
B
G
E
Q
F
Fig. 19.
M
A
K
H
P
G
B


F
E
A
D
K
B
Fig. 20.
O
I
G
H

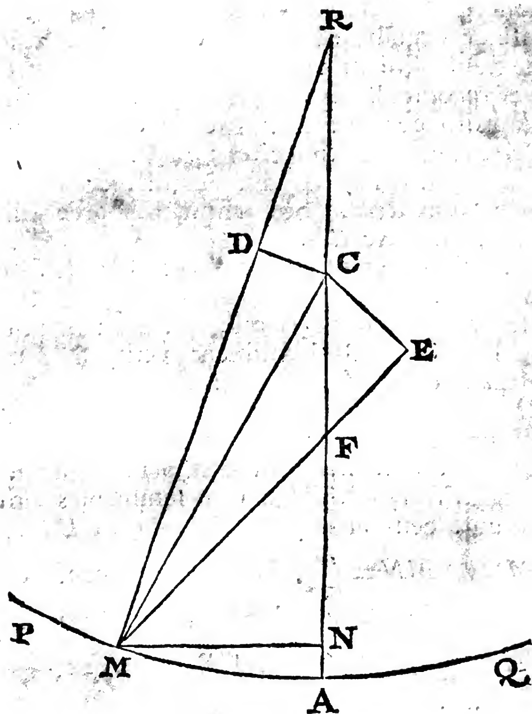
Soit menée du point M la ligne MC, perpendiculaire à la Courbe PQ, qui sera le rayon de la developée, & qui coupera l'axe en un point C; il est clair que cette ligne divisera l'angle RMF formé par les rayons incident & reflechi en deux parties égales, à cause de l'égalité des angles d'incidence & de reflexion. Soient encore menées du point C les perpendiculaires CD sur RM, & CE sur MF prolongée, ces lignes seront égales, puisqu'elles peuvent être prises pour les sinus des angles d'incidence & de reflexion, dont RM soit le sinus total. Soit enfin MN perpendiculaire sur l'axe RA.

Ces choses étant ainsi posées: Soit RM ou RA ou $RN = y$: (ces lignes peuvent être prises pour égales à cause que l'on suppose que l'arc AM est infiniment petit) CM ou $CA = a$; donc $RC = y - a$; CD ou $CE = s$; FM ou FA ou $FN = x$; donc $CF = a - x$.

Pour trouver maintenant la valeur de la seule inconnuë x, l'on considerera que les triangles RNM & RDC sont semblables: ainsi l'on aura cette analogie $RC\ (y-a) . CD\ (s) :: RM\ (y) . MN = \frac{sy}{y-a}$. De même à cause des triangles semblables MNF, CEF, l'on aura $MN\ \left(\frac{sy}{y-a}\right) . FM\ (x) :: CE\ (s) . CF = \frac{xy - sx}{y} = a$; d'où l'on tire $x\ (FA) = \frac{ay}{2y-a}$, qui est précisément la même valeur trouvée dans l'*Analyse des infiniment petits*, *sect.* 6, *art.* 113; & c'est dans ce point où se doit former l'image de l'objet rayonnant: *Ce qu'il falloit trouver.*

Il

Il eſt évident que ſi la Courbe *PMQ* devient circulaire, la ligne *CM* ou *CA* en ſera le rayon, puiſque la developée du cercle ſe réunit en un point qui eſt le centre.



L'on peut trouver cette formule d'une maniere encore plus ſimple, en conſiderant que le triangle *RMF* ayant l'angle *M* diviſé en deux parties égales par la ligne *MC*, on aura cette proportion, *RM* ou *RA* (y). *MF* ou

FA.

FA (x) :: *RC*. $(y-a)$. *CF* $(a-x)$. D'où l'on tirera cette conclusion que dans les Miroirs sphériques les points *R*, *C*, *F*, *A*; c'est à dire, que le point rayonnant, le centre, le foyer & le sommet d'un miroir sont situez de maniere, que les parties de son axe *RA*, *CA*, *FA* sont entr'elles en proportion harmonique.

Comme l'on n'employe guéres dans les Miroirs dont on se sert, que la figure plane ou sphérique, l'on va déduire de la formule $\frac{ay}{2y-a}$ que l'on vient de trouver, & que l'on nommera f dans la suite, d'une maniere très-simple la plûpart des propositions que les Auteurs ont démontrées dans leurs Traitez de Catoptrique. Et l'on en pourra encore tirer beaucoup d'autres dont ils n'ont point parlé; ce qui marque la grande utilité & la fecondité des formules, qui découvrent avec tant de facilité un très-grand nombre de veritez d'usage, que l'on ne pourroit démontrer d'une autre maniere que par de longs raisonnemens, qui sont souvent propres à rebuter les Lecteurs, au lieu de les fixer & de les éclairer.

DES MIROIRS CONCAVES.

Si $y=\infty$; alors $f=\frac{ay}{2y-a}=\frac{1}{2}a$: c'est-à-dire que si les rayons lumineux partent d'une distance infinie, les rayons réflechis se réünissent au quart de l'axe du miroir. Donc les rayons qui tombent paralleles sur la surface d'un miroir concave, se réunissent après la réflexion au quart de l'axe de la sphere dont le miroir est

eſt une portion ; & c'eſt ce point qu'on nomme le vrai foyer du miroir, parce que c'eſt en cet endroit où concourt un plus grand nombre de rayons, & que les corps qui y ſont placez, ſont échauffez ou enflammez.

Il ſeroit facile de faire voir ici, 1°. Qu'il eſt inutile qu'un Miroir ardent ſphérique contienne une étenduë de plus de 30 degrez, parce que tous les rayons qui tomberoient au delà ne ſerviroient à rien. 2°. Que le foyer de ces miroirs, bien loin d'être un point, eſt un petit eſpace circulaire dont le diametre eſt égal à la corde d'un arc de 15 minutes du grand cercle de la ſphére dont le miroir eſt une portion. D'où l'on pourroit tirer cette concluſion, que l'on ne peut faire un miroir qui brûle à une diſtance quelconque comme quelques-uns l'ont crû, fondez ſur ce faux principe, que les rayons du Soleil étant toûjours phyſiquement paralleles, ſe réuniſſent par le moyen des miroirs ſphériques dans un point phyſique : mais au contraire ce foyer a d'autant plus d'étenduë que le miroir eſt portion d'une plus grande ſphére ; en ſorte qu'il pourroit être portion d'une ſphére telle que ſon foyer ſeroit preſque auſſi grand que le miroir, comme il eſt facile d'en faire le calcul : d'où l'on voit que les rayons réflechis n'étant pas plus réunis que leurs incidens, ne pourroient produire aucun effet ſenſible.

3°. Que ſi l'on circonſcrit au cercle *PMQ* une parabole qui ait pour parametre le diametre de ce cercle, & qu'elle le touche par ſon ſommet, & que l'on conçoive deux miroirs l'un parabolique & l'autre ſphérique formez par le moyen de ces deux courbes ; il eſt évident,

dent, dis-je, qu'ils auront un même foyer, & qu'ainſi ils feroient à peu près le même effet: car les rayons qui tomberont paralleles ſur ces deux ſurfaces ſe réuniront les uns au quart du parametre, comme on le démontre dans les Sections Coniques, & les autres au quart du diametre, comme on le vient de voir. Et cette parabole eſt la plus petite de toutes celles qui peuvent être circonſcrites au cercle.

II. Si $y = a$ qui exprime le rayon de la ſphére dont le miroir eſt une portion; l'on aura auſſi $f = a$: c'eſt-à-dire, que ſi le point rayonnant eſt au centre du miroir, l'image s'y formera auſſi; ce qui eſt évident puiſque dans ce cas les rayons incidens ſont perpendiculaires à la ſurface du miroir. D'où l'on peut conclure, 1°. Que dans quelque endroit que l'on ſe place pour ſe regarder dans un miroir concave, on ne peut ſe voir que dans une ligne qui paſſe par le centre de ce miroir, & qui en eſt un des diametres: car on ne ſe peut voir que par des rayons qui ſe réflechiſſent ſur eux-mêmes. Donc ſi un œil eſt placé au centre du miroir, il doit ſe voir dans tout le miroir, mais tout eſt confus à cauſe du concours des rayons. 2°. Que ſi un objet eſt placé au centre du miroir, & que l'œil du ſpectateur ſoit hors du miroir, il ne pourra jamais voir l'objet, parce qu'il ne ſera plus expoſé à l'action des rayons réflechis.

III. Si $y > a$ comme on l'a ſuppoſé d'abord, donc $f < a$, mais $> \frac{1}{2}a$: c'eſt à dire que ſi la diſtance du point rayonnant eſt plus grande que le demi-axe du miroir, la diſtance de l'image au miroir ſera toûjours plus grande

que

que le quart de cet axe; ou ce qui eſt la même choſe, ſi le point rayonnant eſt au-delà du centre, les rayons réflechis ſe réüniront entre le centre & le vrai foyer. D'où l'on peut conclure, 1°. Que plus un objet s'éloignera, plus ſon image approchera du foyer; mais qu'elle n'y arrivera jamais, parce que les rayons qui partent de cet objet ne feront jamais paralleles, ce qui eſt neceſſaire afin que leur réünion ſe faſſe au foyer.

2°. Que plus l'objet s'éloignera du miroir, plus au contraire ſon image s'en approchera; & ſi l'objet s'en approche, l'image s'en éloignera, & allant, pour ainſi dire, comme au-devant de l'objet, ils ſe réüniront au centre. Et cette image paroîtra comme ſuſpenduë en l'air entre l'objet & le miroir.

3°. Que ſi l'œil du ſpectateur eſt plus éloigné du miroir que l'image, l'objet paroîtra renverſé, c'eſt à dire que ce qui eſt en haut paroîtra en bas, & ce qui eſt à droite paroîtra à gauche, parce que les rayons réflechis ſe feront croiſez avant que d'entrer dans l'œil.

4°. Que ſi l'œil eſt placé entre le foyer & le miroir, il verra cet objet dans ſa ſituation naturelle.

5°. Comme les rayons qui partent d'un point de l'axe pris au deſſus du centre ſont toûjours convergens en ſe réflechiſſant; il eſt clair que l'on peut par le moïen d'un miroir concave corriger le défaut de ceux qui ne peuvent voir que de loin, & qu'on nomme *Presbytes:* car les rayons réflechis entreront dans l'œil de la même maniere que s'ils partoient d'un objet fort éloigné, ce qui eſt neceſſaire afin que ces ſortes de vûës apperçoivent diſtinctement les

les objets : à quoi l'on peut ajoûter qu'ils renvoïent une plus grande quantité de rayons dans l'œil. Ainsi l'on peut dire que ces miroirs font le même effet par réflexion que les verres convexes par réfraction. D'où l'on voit encore que plus le miroir concave est portion d'une petite sphére, plus les rayons réflechis seront convergens, & par conséquent que ces rayons se réüniront plûtôt dans l'œil.

IV. Si $y < a$, donc f sera toûjours $> a$: c'est à dire que si le point rayonnant est situé entre le centre & le foyer, les rayons réflechis iront toûjours rencontrer l'axe au-delà du centre : & reciproquement les rayons réflechis concourans au-delà du centre, le point rayonnant sera toûjours entre le centre & le foyer.

D'où l'on peut conclure, 1°. Que si l'on place un objet entre le miroir & son centre, plus il sera proche du centre plus il paroîtra grand : car à cause de la divergence des rayons, il sera vû sous un plus grand angle.

2°. Qu'il sera vû dans sa situation naturelle : car ce qui est à droite paroîtra à gauche dans le miroir, & ce qui est à gauche paroîtra à droite.

3°. L'on peut encore conclure de ce que l'on vient de dire, que si l'on décrit une Ellipse qui ait pour foyer les points *R* & *F* & pour parametres une ligne égale à l'axe du miroir $= 2\,CA$, & qu'on en forme un miroir concave, il fera physiquement le même effet que le miroir sphérique formé par le cercle qui la toucheroit à son sommet *A*: car l'on démontre dans les Sections Coniques que les rayons

rayons qui partent d'un des foyers d'une Ellipſe, ſe réüniſſent à l'autre foyer après la réflexion. Et il ſeroit facile de prouver que ce cercle eſt le plus grand de tous ceux qui peuvent être inſcrits dans cette Ellipſe.

V. Il eſt encore évident que la valeur de F ſera poſitive, negative ou infinie ſelon que la quantité $2y$ ſera plus grande, plus petite, ou égale à a. Car 1°, ſi $y > \frac{1}{2}a$, la grandeur $f = \frac{ay}{2y-a}$ ſera poſitive; d'où l'on doit conclure que le point rayonnant & le foyer ſeront vers un même côté du miroir, comme on l'a ſuppoſé en faiſant le calcul.

D'où l'on voit que ſi l'on place un objet entre le centre & le foyer du miroir, & que les yeux du ſpectateur ſoient placez plus proche du miroir que n'eſt le point de concours des rayons réflechis, cet objet doit paroître confus: car dans ce cas les rayons réflechis ſe réüniſſent dans un point de l'axe qui eſt au-delà du centre: or les yeux étant placez avant le concours de ces rayons, les recevront comme s'ils venoient de differens points; donc ils ne ſe réüniront pas exactement ſur la retine, donc la viſion ſera confuſe.

Mais ſi l'œil du ſpectateur eſt placé au-delà du centre, il eſt clair qu'il verra cet objet renverſé, parce que les rayons réflechis s'étant croiſez avant que d'entrer dans l'œil, ce qui eſt à droite a paſſé à gauche, & ce qui eſt à gauche a paſſé à droite.

Comme l'image d'un objet placé entre le foyer & le centre paroît au-devant du miroir plus éloignée que le centre, il eſt facile de ren-

rendre la raison de cet effet qui paroît surprenant : c'est que si l'on présente vers le foyer d'un miroir concave la pointe d'une épée nuë, elle paroît revenir par un mouvement contraire, en sorte que ceux qui ne connoissent pas cet effet, mettent la main au-devant de leur visage, de crainte qu'elle ne les aille frapper.

2°. Si $y < \frac{1}{2}a$; c'est-à-dire que si le point rayonnant est plus proche du miroir que le quart de l'axe, ou ce qui revient au même, s'il est placé entre le miroir & son foyer, l'image de ce point sera située dans l'axe de ce miroir, mais prolongé au-delà du sommet du miroir, parce qu'alors la valeur de f étant négative, le concours des rayons réflechis se fait au-delà du miroir : Donc ces rayons seront toûjours divergens ; & ainsi plus un œil sera proche du miroir, plus ces rayons se réüniront loin du crystallin. D'où l'on voit que plus un objet sera proche du foyer du miroir, plus son image en doit paroître éloignée. Car les rayons réflechis étant moins divergens, leur réünion ou l'image de l'objet doit se faire plus loin du miroir.

Il est encore évident, que si l'image d'un objet paroît au-delà du miroir, sa distance du miroir est toûjours plus grande que celle de l'objet rayonnant. Mais il est facile de voir que si l'objet s'éloigne du miroir, l'image s'en éloignera aussi ; & qu'au contraire l'objet s'en approchant, l'image s'en approchera : car dans ce cas les rayons réflechis sont plus divergens, donc leur réünion se fera plûtôt au fond des yeux, au lieu que dans le premier cas ils sont moins divergens. Mais l'image de cet objet

objet paroîtra toûjours dans sa situation naturelle.

Il est encore facile de connoître, que si un objet est placé hors la concavité d'un miroir, & qu'il soit plus éloigné de l'axe de ce miroir que l'œil du spectateur, il ne pourra pas voir cet objet.

3°. Enfin si $2y = a$ ou $y = \frac{1}{2}a$; donc $f = \infty$; c'est-à-dire que si un objet est placé au quart de l'axe du miroir, les rayons réflechis seront paralleles à cet axe; donc l'image de cet objet devroit paroître à une distance infinie. D'où l'on voit que si l'on met la flamme d'une chandelle au foyer d'un miroir sphérique, ou parabolique, le miroir paroîtra comme en feu, & il réflechira assez de lumiere pour lire à une très-grande distance. Le P. *Taquet* dit qu'il a lû par ce moïen à une distance de quatre cens pieds.

DES MIROIRS PLANS.

VI. Si dans la formule $f = \frac{ay}{2y-a}$, l'on suppose $a = \infty$; il est visible que le miroir deviendra plan au lieu de concave qu'on l'a supposé: l'on aura donc $f = -y$; ce qui fait connoître que les rayons réflechis sont toûjours divergens, & que l'image doit paroître autant au-delà du miroir, que l'objet est éloigné de sa surface: car l'œil du spectateur est affecté de la même maniere que si l'objet étoit placé au-delà du miroir dans le point de réunion des rayons réflechis prolongez; donc son image y doit paroître.

D'où l'on peut conclure 1°. Que l'image de

de chaque point d'un objet doit paroître dans le concours du rayon réflechi qui passe par le centre de l'œil & de la perpendiculaire menée de ce point rayonnant sur la surface du miroir.

2°. Que la distance de l'image à l'œil est égale au rayon incident plus le rayon réflechi. Donc si l'on voïoit un objet par la réflexion de plusieurs miroirs plans, la distance de son image à l'œil seroit égale à la somme des rayons incidens & des rayons réflechis.

3°. Que dans un miroir placé horisontalement, les objets verticaux y doivent paroître dans une situation renversée. Mais que les objets paralleles à la surface du miroir doivent aussi paroître au dedans paralleles, & que leurs images ne sont pas semblablement posées, quoique les objets paroissent dans leur situation naturelle.

4°. Que si les objets sont inclinez, leurs images doivent aussi paroître inclinées dans ces miroirs: ce qui peut servir à rendre raison pourquoi présentant au plancher d'une chambre un miroir incliné, ce plancher paroît s'incliner de l'autre côté.

5°. Que si un miroir plan fait avec l'horison un angle de 45 degrez, les objets horisontaux paroîtront verticaux, & au contraire les verticaux paroîtront horisontaux.

6°. Que si l'on joint deux miroirs plans faisant un angle quelconque, l'on ne pourra pas voir un même objet par le moyen de ces deux miroirs, si l'œil est tourné du côté de la convexité de l'angle: Mais s'il est tourné du côté de sa concavité, on le pourra voir plusieurs fois, si ces miroirs font un angle aigu.

 Que

Que ſi l'on veut multiplier cet objet une infinité de fois, il faut que ces miroirs plans ſoient paralleles entr'eux.

7°. Il ſeroit facile de prouver que ſi l'inclinaiſon d'un miroir varie d'un dégré, le rayon réflechi du rayon incident, ſe changera de deux degrez : ce qui pourroit ſervir à rendre raiſon pourquoi les rayons du Soleil réflechis par l'eau d'une riviere qui coule même fort lentement, ſont fort agitez, enſorte qu'un petit mouvement de l'eau les porte dans une étenduë ſurprenante. D'où l'on peut conclure que ſi l'on tourne un miroir circulairement, on fera auſſi mouvoir l'image de l'objet circulairement, ce qui fera paroître l'objet ſe mouvoir une fois plus vîte.

DES MIROIRS CONVEXES.

VII. Si l'on conçoit que le point rayonnant tombe de l'autre côté du point *R* par rapport au point *A*, ou ce qui revient au même, ſi la Courbe *PMQ* eſt convexe vers le point lumineux, alors *y* deviendra negative de poſitive qu'elle étoit dans la formule. Ainſi FA ou $f = \frac{-ay}{-2y-a} = \frac{ay}{2y+a}$: & comme cette valeur eſt toûjours poſitive, il eſt clair que les rayons réflechis infiniment proches ſeront toûjours divergens ; c'eſt-à-dire que le foyer convexe, ou le point de réünion des rayons réflechis ſera toûjours au delà de ce miroir. D'où l'on voit que ces miroirs ſont encore moins propres à échauffer ou brûler que les miroirs plans.

L'on trouveroit encore la même valeur de

de f en changeant dans les miroirs ſphériques le ſigne de la grandeur a; ce qui eſt clair, puiſque le centre de ces miroirs eſt toûjours du côté oppoſé au point rayonnant.

Comme l'on ne peut voir par le moyen de deux miroirs plans faiſant un angle quelconque, le même objet repeté lorſque l'œil eſt tourné du côté de la convexité de l'angle, il eſt évident qu'un miroir convexe que l'on peut regarder comme compoſé d'une infinité de petits miroirs plans, ne ſauroit non plus multiplier les objets: car du même point d'un miroir convexe, il ne peut venir dans l'œil que les rayons qui partent du point d'un objet qui lui répond: & c'eſt pour cette raiſon que l'on voit toûjours un point plus éclairé que les autres.

Il eſt viſible à cauſe de la divergence des rayons réflechis, que l'on peut ſe ſervir de ces miroirs pour corriger le défaut de ceux qui ont la vûë courte, & qu'on nomme *Myopes:* car ces rayons entrent dans l'œil ſous un plus grand angle; & de la même maniere que ſi l'objet étoit plus proche; ce qui eſt neceſſaire pour ces ſortes de vûës, puiſqu'à cauſe de la trop grande convexité du cryſtallin, les rayons ſe réüniſſent avant que d'arriver à la retine, ce qui rend la viſion confuſe. Ainſi l'on peut dire qu'à l'égard de ceux qui ont la vûë courte, ces miroirs produiſent le même effet que les verres concaves.

D'où l'on peut conclure 1°. Que plus un miroir convexe ſera proche de l'œil, plus les rayons réflechis qui partent d'un même point d'un objet ſe réüniront au-delà du cryſtallin. 2°. Que plus une vûë ſera courte, plus le

miroir doit être convexe, c'eſt-à-dire portion d'une plus petite ſphére: car les rayons réfléchis ſont d'autant plus divergens que le miroir eſt convexe.

L'on peut encore conclure de ce que le foyer du point rayonnant *R* ſe trouve du côté oppoſé à cauſe de la divergence des rayons, que ſi l'on décrit deux hyperboles oppoſées, dont l'une ait pour foyer le point *R* & l'autre le point *F* & pour parametre une ligne double de *CA*, ou égale à l'axe de la ſphére dont le miroir eſt une portion, celle qui a pour foyer le point *F* formant un miroir convexe il fera phyſiquement le même effet que le miroir ſphérique formé par le cercle qui a pour rayon *CA*: car c'eſt la proprieté des foyers de ces hyperboles, comme on le démontre dans les Sections Coniques. Et il ſeroit facile de faire voir que le cercle qui touche cette hyperbole à ſon ſommet *A*, eſt le plus grand de tous ceux qui y peuvent être inſcrits.

VIII. Comme la valeur de f eſt toûjours poſitive puiſque tous ſes termes ſont affectez des mêmes ſignes; il eſt évident que quelque grande que ſoit la diſtance de l'objet au miroir, l'image n'en paroîtra jamais plus éloignée que le quart de l'axe: Car ſi l'on ſuppoſe que $y = \infty$; l'on aura encore $f = \frac{1}{2}a$; c'eſt-à-dire que dans le cas que l'objet fût à une diſtance infinie du miroir, ſon image paroîtroit préciſément à la diſtance du quart du diametre de la ſphére dont le miroir eſt portion. Ce ſeroit la même choſe ſi les rayons tomboient paralleles ſur la ſurface du miroir. D'où l'on peut tirer les concluſions ſuivantes.

1°. Que ſi l'objet s'approche du miroir, l'ima-

l'image s'en approchera auſſi : au contraire que l'objet s'en éloignant ſon image s'en éloignera.

2°. Que la diſtance de l'objet au miroir eſt toûjours plus grande que celle de l'image au même miroir, & qu'ainſi on pourra quelquefois voir l'image d'un objet preſque dans la ſurface du miroir.

3°. Que la diſtance de l'image au centre du miroir eſt toûjours plus petite que le rayon.

4°. Que cette même diſtance de l'image au centre eſt encore plus grande que ſa diſtance au miroir.

5°. Les images paroiſſent toûjours plus petites que leurs objets : car à cauſe de la divergence des rayons, ces miroirs les font paroître ſous un plus petit angle que les miroirs plans, qui font voir les objets dans leur grandeur naturelle : D'où l'on voit que plus un miroir ſera portion d'une petite ſphére, plus un objet paroîtra petit.

6°. Si l'on approche l'objet du miroir, l'œil du ſpectateur demeurant immobile, ſon image paroîtra plus grande, parce que l'angle deviendra plus grand. Il en eſt de même ſi l'œil s'approche du miroir, & que l'objet demeure immobile ; car ſon image paroîtra & plus grande & plus proche du miroir.

7°. L'image d'un point pris ſur la perpendiculaire au miroir & qui en eſt près, paroît plus éloignée du centre, que celle d'un autre point quoique plus éloigné du miroir. D'où il ſuit que les objets qui ſont perpendiculaires à la ſurface des miroirs convexes doivent paroître renverſez.

IX. Comme la formule renferme trois

grandeurs, la distance de l'objet lumineux au miroir, celle du centre & celle du foyer; il est évident que deux quelconques de ces grandeurs étant données, on trouvera toûjours la 3e: Ainsi supposant que la distance du centre & celle du foyer soient connuës, l'on connoîtra celle du point lumineux: Ou, la distance du point lumineux & celle du foyer étant données, l'on trouvera celle du centre ou le rayon de la sphére dont le miroir est une portion. Ces choses sont trop faciles pour qu'on s'y arrête davantage.

REMARQUE.

Il est facile maintenant en se servant des mêmes principes, de resoudre un Problême de Catoptrique qui se trouve dans quelques Auteurs. Mais il est bon auparavant de démontrer ce Lemme.

LEMME.

Les lignes menées du sommet d'un miroir convexe ou concave aux extremitez d'un objet & de son image, forment des angles égaux.

Soit un objet *OT*, & son image *ot*, soient menées du sommet *A* les lignes *AO*, *AT*, *At*, *Ao*; il faut prouver que l'angle $OAT = tAo$.

Il est évident 1°. Que l'axe *RA* du miroir est perpendiculaire sur l'objet & sur l'image. 2°. Que si par les points *O*, *o*, l'on méne la ligne *Oo* prolongée en *Q*, elle passera par le centre *C*. Or, par le Problême géneral,

xy

$xy - ax = ay - yx$; donc $y . x :: y - a . a - x$, c'eſt-à-dire, que $RA . FA :: RC . CF$; mais à cauſe des triangles ſemblables CRO, CFo, $RC . CF :: RO . Fo$; donc $RA . FA :: RO . Fo$; Ainſi à cauſe que les angles en R & en F ſont droits, les angles RAO & FAO ſont égaux; donc &c.

COROLLAIRE.

D'où l'on peut conclure 1°. Que la grandeur de l'objet & de ſon image ſont entr'elles comme leurs diſtances du ſommet du miroir, ſi on les conſidere comme des lignes ; & que ſi on les conſidere comme des ſurfaces, leurs grandeurs ſeront comme les quarrez de ces diſtances. 2°. Que l'objet & ſon image ſont coupés dans le même rapport par la ligne menée du ſommet du miroir par le centre.

PROBLEME.

Un objet étant donné avec un miroir, trouver à quelle diſtance de ce miroir on le doit placer, afin que ſa grandeur ſoit à celle de ſon image en telle raiſon que l'on voudra.

Soit nommé l'objet O ; ſon image I; la diſtance de l'objet au miroir y ; & celle de l'image au miroir f; & que la grandeur de l'objet ſoit à celle de ſon image dans la raiſon de m à n. Or par le Lemme la grandeur de l'objet eſt à celle de ſon image (en les regardant comme des ſurfaces) en raiſon des quarrez de leurs diſtances au ſommet du miroir : l'on aura donc $O . I :: yy . ff$; mais par l'hypothêſe $O . I :: m . n$; donc $yy . ff :: m . n$. Et parce que l'on a trouvé $f = \frac{ay}{2y-a}$; donc $yy . \frac{aayy}{4yy-4ay+aa} :: m . n$; d'où l'on tire cette égalité du ſecond degré $yy - ay = \frac{maa-naa}{4n}$; donc y =

$= \frac{1}{2}a + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}$. ou $y = \frac{a\sqrt{m}+a\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$: & mettant cette valeur dans celle de ff, l'on aura $\frac{aayy}{4yy-4ay+aa} = \frac{\overline{m+n+\sqrt{mn}}\times aa}{4m}$; mais $yy = \frac{\overline{m+n+2\sqrt{mn}}\times aa}{4n}$; l'on aura donc enfin $yy.ff::$ $\frac{\overline{m+n+2\sqrt{mn}}\times aa}{4n}.\frac{\overline{m+n+2\sqrt{mn}}\times aa}{4m}::m.n$. C'eſt à dire que ſi l'objet eſt placé à la diſtance de $\frac{a\sqrt{m}+a\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$; ſon image paroîtra à la diſtance de $\frac{a\sqrt{m}+a\sqrt{n}}{2\sqrt{m}}$; & alors le rapport de leurs grandeurs ſera dans la raiſon de m à n que l'on demande.

Que ſi l'objet & ſon image ſont regardez comme des lignes ; alors leurs grandeurs ſeront proportionnelles à leurs diſtances du ſommet du miroir ; ainſi l'on aura $O.I::y.$ $f::f::m.n$; d'où l'on tire $f = \frac{ay}{2y-a} = \frac{\overline{m+n}\times a}{2m}$, & $y = \frac{\overline{m+n}\times a}{2n}$. Si donc l'on place l'objet à la diſtance de $\frac{\overline{m+n}\times a}{2n}$, ſon image paroîtra à celle de $\frac{\overline{m+n}\times a}{2m}$; donc leurs grandeurs ſeront dans la raiſon donnée de m à n. *Ce qu'il falloit trouver.*

Il eſt évident que ſi l'on donnoit la diſtance de l'objet & de l'image au miroir, l'on

D 5 au-

auroit auſſi le rapport de la grandeur de l'image à celle de l'objet.

Il ſera encore facile, lorſque l'image d'un objet ſera formée par la réflexion de pluſieurs miroirs, de trouver le rapport de la grandeur de l'objet à ſa derniere image.



DES MOUVEMENS

Primitivement retardés en raiſon des temps qui reſteroient à écouler juſqu'à leur entiere extinction dans le vuide, faits dans des milieux réſiſtans en raiſon des quarrés des viteſſes effectives du mobile.

PAR M. VARIGNON.

* ON a vû dans les Mem. des 15. Juin, & 17. Août derniers (voyez les Mem. de 1709. c'eſt d'eux que ſeront priſes les pages qu'on va citer.) ce que des Mouvemens primitivement accelerés, depuis zero ou non, en raiſon des temps écoulés, ainſi qu'on les ſuppoſe d'ordinaire avec *Galilée*, deviendroient dans des milieux réſiſtans en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles ou reſtantes du mobile: voici preſentement ce qui devroit auſſi arriver dans ces milieux à des mouvemens primitivement retardés en raiſon des temps à écouler juſqu'à leur entiere extinction s'ils ne trouvoient aucune réſiſtance de la part du milieu, ainſi qu'on le penſe encore d'or-

* 1709. 18 Dec.

d'ordinaire avec *Galilée* touchant les corps jettés de bas en haut dans le vuide.

PROBLEME.

* *La construction générale du Lem. 1. pag. 246. de 1709. étant ici supposée, trouver les Courbes ARC des résistances totales ou des vitesses perduës, HUC des vitesses restantes, &c. Dans l'hypothése 1°. des résistances instantanées en raison des quarrés des vitesses restantes; & 2°. des vitesses primitives retardées en raison des temps qui resteroient à écouler jusqu'à leur entiere extinction, si le milieu ne leur faisoit aucune résistance.*

SOLUTION.

I. Soient encore ici les mêmes noms que dans l'art 3. du Lem. 1. pag. 247. de 1709. savoir $AF = a$, la vitesse initiale; $TV = v$, ce qu'il en resteroit dans un milieu sans résistance à la fin du temps $AT = t$; $AC = a$, ce qu'elle emploïeroit de temps en tout jusqu'à son entiere extinction dans ce milieu; $TR = r$, les résistances totales, ou les vitesses perduës pendant le temps AT dans le milieu résistant ici en raison des quarrés des vitesses actuelles ou restantes de celles-là; $RV = TU = u$, ces vitesses restantes à la fin de ces temps; $TE = z$ en raison des résistances instantanées dr.

II. Ces noms ainsi supposés, la premiere des deux conditions de ce Problême-ci donnera

* Fig. I.

nera $TE\ (z) = \frac{TU \times TU}{a} \left(\frac{uu}{a}\right) = \frac{\overline{TV - TR}^2}{a} \left(\frac{\overline{v - r}^2}{a}\right)$; & la feconde, $TV\ (v) = TC\ (a - t)$: De forte que les deux enfemble donneront $z = \frac{uu}{a}$, & $z = \frac{\overline{a - t - r}^2}{a}$. Donc en fubftituant chacune de ces deux valeurs de z dans l'équation $\frac{dt}{a} = \frac{dr}{z} = \frac{-dt - du}{z}$ de l'art. 3. du Lem. 1. pag. 248. de 1709. L'on aura ici $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{\overline{a - t - r}^2}$ pour l'équation de la Courbe *ARC* des réfiftances totales *TR* (r) ou des viteffes perduës pendant les tems *AT* (t) ; & $\frac{dt}{a} = \frac{-adt - adu}{uu}$, où $uudt = -aadt - aadu$, d'où réfulte auffi $aadt + uudt = -aadu$, ou $dt = \frac{-aadu}{aa + uu}$ pour l'équation pareillement requife de la Courbe *HUC* des viteffes reftantes *TU* (u).

III. Pour conftruire cette Courbe par le moyen de cette équation, il faut confiderer que *UV* en *HF*, ou *T* en *A*, rend *HA* = *UT* (*Lem.* 1. *pag.* 246. *de* 1709.) = *RV* = *AF* = *a*. Cela étant, foit du centre *A* & du rayon *AH*, le quart de cercle *HSD*, lequel rencontre *CA* prolongée en *D*, & qui ait *D*Ω pour tangente en ce point *D*, laquelle *D*Ω foit rencontrée en *L*, Ω, par *UL*, *H*Ω, paralleles à *CD*. Soient les Secantes *AL*, *A*Ω, lefquelles rencontrent le quart de cercle en Π, *S* ; defquels points foient Π*P*, *SQ*, paralleles à *HA*, & qui

qui rencontrent AD en P, Q. De l'autre extremité π de l'élement $\Pi\pi$ du quart de cercle soient aussi πp, πO, qui achevent le petit parallelogramme rectangle $Pp\pi O$.

IV. Cette construction donnera non-seulement $AD = AH = a$, & $DL = TU = u$; mais encore AL ($\sqrt{aa + uu}$). $A\Pi$ (a) :: DL (u). $\Pi P = \frac{au}{\sqrt{aa + uu}}$. Et AL ($\sqrt{aa + uu}$). $A\Pi$ (a) :: AD (a). $AP = \frac{aa}{\sqrt{aa + uu}}$. Ce qui donne Pp ou $\pi O = \frac{-aaudu}{aa + uu \times \sqrt{aa + uu}}$; & ensuite ΠP $\left(\frac{au}{\sqrt{aa + uu}}\right)$. $A\Pi$ (a) :: πO $\left(\frac{-aaudu}{aa + uu \times \sqrt{aa + uu}}\right)$. $\Pi\pi = \frac{-aadu}{aa + uu}$. Donc l'art. 2. venant de donner aussi $dt = \frac{-aadu}{aa + uu}$, l'on aura ici $dt = \Pi\pi$; & par conséquent (en intégrant) $t = H\Pi + q$. Mais le cas de AT (t) $= 0$ en A, rendant DL (u) $= D\Omega$ (a), & conséquemment $H\Pi = HS$, réduit cette intégrale à $0 = HS + q$, d'où résulte $q = -HS$. Donc t (AT) $= H\Pi - HS = S\Pi$ est cette intégrale juste & précise: de sorte que S sera l'origine des arcs $S\Pi$ qui pris depuis ce point fixe S vers D, exprimeront les tems écoulés AT (t), à la fin desquels se trouvent les vitesses actuelles ou restantes DL (u); ce qui rend ici l'arc HS entierement inutile.

V. Donc si après avoir pris $AT = S\Pi$, & mené $A\Pi$ jusqu'à la rencontre de $D\Omega$ en L, on fait TU parallele à DH, & LU parallele à

 DC;

DC; le point *U* où elles se rencontreront, sera un de ceux de la Courbe cherchée *HUC* des vitesses restantes (*u*) ; & ainsi de tous ses autres points à l'infini. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*

VI. Cette Courbe *HUC* des vitesses restantes (*u*) étant ainsi décrite, il n'y a plus qu'à prendre par tout *UR*=*TV* sur *UT* prolongée jusqu'à *FC* parallelement à *HF*; & la Courbe *ARC* qui passera par tous les points *R* ainsi trouvés, sera (*Solut. de la Prop. gener. des Mem. de* 1707. *pag.* 498.) la Courbe des résistances totales (*r*), ou des vitesses perduës. *Ce qu'il falloit encore ici trouver.*

COROLLAIRE I.

Puisque la construction précedente (*Solut. art.* 5.) donne les vitesses restantes *TU*=*DL*, & les tems écoulés *AT*=*S*Π; que *DL* diminuë à mesure que *S*Π augmente, en sorte que *DL*=0 lorsque *S*Π=*SD*; il est manifeste que l'on aura ici *TU*—0 lorsque *AT*=*SD*; & qu'ainsi en prenant *AM*=*SD*, le point *M* sera celui où les vitesses restantes *TU* (*u*) seront entierement éteintes dans le milieu résistant supposé, & conséquemment *AM* sera le tems écoulé jusqu'à leur entiere extinction dans ce milieu, comme *AC* l'auroit été (*hyp.*) dans un milieu sans résistance.

COROLLAIRE II.

Donc toute la durée du mouvement permis par la résistance supposée du milieu où il se fait, sera ici à ce qu'il auroit duré dans un milieu

milieu ſans réſiſtance : : *AM*. *AC* : : *SD*. *AC*. (la conſtruction donnant $AC = AF = AH = AD$) : : *SD*. *AD*. C'eſt à dire, comme l'arc *SD* de 45. deg. eſt à ſon rayon, & conſéquemment comme le ſecteur circulaire *SAD* eſt au triangle rectiligne $DA\Omega$; ou comme le quart de cercle *AHD* eſt au quarré circonſcrit $AH\Omega D$, ou bien auſſi comme le cercle entier au quarré qui lui ſeroit circonſcrit, ainſi que M. *Huygens* l'a ſeulement avancé dans les pag. 173. & 174. de ſon *Diſcours de la Cauſe de la Peſanteur*.

COROLLAIRE III.

Donc auſſi *MC*, ou $AD - SD$, ſera ici la quantité du temps dont le mouvement retardé par la réſiſtance ſuppoſée, dure moins qu'il n'auroit fait dans un milieu ſans réſiſtance.

COROLLAIRE IV.

Puiſque (*hyp.*) *AF* eſt la viteſſe initiale qui retardée en raiſon des temps à écouler juſqu'à ſon entiere extinction dans un milieu ſans réſiſtance, ne s'y éteindroit tout à fait qu'à la fin du temps $AC = AF$; ſi l'on fait $T\beta$ parallele à *CF*, & qui rencontre *AF* en β, il eſt manifeſte que l'on aura auſſi $A\beta = AT$ pour la viteſſe initiale qui ainſi retardée ne s'y éteindroit qu'à la fin du temps *AT* dans ce milieu ſans réſiſtance. Par conſéquent cette ſeconde viteſſe initiale $A\beta$ ou *AT* ſera à la reſtante de la premiere *AF* à la fin du temps *AT* dans le milieu réſiſtant en raiſon des quarrés des vi-

vitesses actuelles du mobile :: $AT . TU$ (la construction donnant $AT = S\Pi$, & $TU = DL$) :: $S\Pi . DL$. C'est-à-dire, comme l'arc $S\Pi$ à la tangente de son complement à 45. deg. ou comme le secteur circulaire $SA\Pi$ est au triangle rectiligne DAL.

COROLLAIRE V.

De ce que (*Corol.* 1.) TU (u) $= 0$ en M, & qu'ainsi l'équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ de la Courbe *HUC* s'y doit réduire à $dt = \frac{-aadu}{aa} = -du$; & il est manifeste que cette Courbe doit rencontrer son axe AC en M, & sous un angle de 45. deg. à une distance AM du point A; laquelle (*Corol.* 1.) soit égale à SD.

COROLLAIRE VI.

Pour en H, son équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ aïant TU (u) $= AH$ (a); & par-là s'y réduisant à $dt = \frac{-aadu}{aa+aa} = -\frac{1}{2}du$; cette Courbe *HUC* y doit rencontrer sa premiere ordonnée AH sous un angle dont le sinus soit la moitié de celui de son complement.

COROLLAIRE VII.

De plus l'équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ de cette Courbe *HUC* donnant par tout l'analogie dt.
$-du$

$-du :: aa . aa + uu$. Dont le dernier terme $aa + uu$ diminuë toûjours (*Corol.* 1.) depuis *A* jusqu'en *M*; si l'on fait dt constante, on verra que les du diminuent aussi toûjours jusque-là: & qu'ainsi cette même Courbe *HUC* doit tourner sa convexité vers son axe *AC* depuis *H* jusqu'en *M*.

COROLLAIRE VIII.

La construction précédente (*Solut.*) donnant par tout $TU = RV$, le cas (*Corol.* 1.) de $TU = 0$ en *M*, rendra aussi $RV = 0$ au point *N* où *FC* est rencontrée par *MN* parallele à *AF*; ainsi la Courbe *ARC* des résistances totales ou des vitesses perduës passera par ce point *N*.

COROLLAIRE IX.

L'art. 2. de la Solut. qui a donné $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{\overline{a-r}^2}$ pour l'équation de cette Courbe *ARC*, aïant pareillement donné $\frac{uu}{a} = z = \frac{\overline{a-r}^2}{a}$, donne consequemment aussi $\frac{dt}{a} = \frac{adr}{uu}$, ou $\frac{dt}{dr} = \frac{aa}{uu} = \frac{AH \times AH}{TU \times TU}$. Ce qui fait voir,

1°. Que les ordonnées *TR* (r) de cette Courbe *ARC* seront par tout aux soûtangentes correspondantes :: $TU \times TU . AH \times AH$. C'est à dire, comme les quarrés de vitesses res-

reſtantes correſpondantes *TU* ſeront au quarré de la premiere ou de la plus grande de toutes. De ſorte que

2°. *TU* en *AH* lui devenant égale, cette Courbe *ARC* doit diviſer l'angle *CAF* en deux également.

3°. *TU* en *M* devenant (*Corol.* 1.) $=0$, & y rendant par-là $\frac{dt}{dr}\left(\frac{AF \times AH}{TV \times TV}\right) = \frac{AF \times AH}{0}$, c'eſt à dire, *dt* infinie par raport à *dr*; la tangente en *N* de cette Courbe *ARC* doit être parallele à ſon axe *AC*.

COROLLAIRE X.

Pour ce qui eſt des eſpaces ici parcourus pendant les temps *AT* (t) nonobſtant les réſiſtances ſuppoſées, ſoit par le point *D* une Logarithmique *FDH* d'une ſoûtangente $=AD=a=1$, & dont l'aſymptote ſoit *FH* de laquelle elle s'écarte du côté de *H*. Soient *SQ*, ΠP, πp, prolongées juſqu'à cette Logarithmique en *X*, Λ, λ, deſquels points ſoient *XZ*, ΛG, $\lambda\omega$, perpendiculaires en *Z*, *G*, *Y*, ω, ſur *AF*, *QX*, $P\Lambda$.

Cela fait, la Logarithmique *FDH* donnera $G\Lambda$ ou *AP* $\left(\frac{aa}{\sqrt{aa+uu}}\right)$ à ſa ſoûtangente (a) :: $\lambda\omega$ ou Pp $\left(\frac{-aadu}{aa+uu \times \sqrt{aa+uu}}\right)$. $\omega\Lambda = \frac{-adu}{aa+uu}$. Donc (en intégrant) $\int \frac{-adu}{aa+uu} = -P\Lambda + q$. Or la précedente Solution (outre ces valeurs de *AP*, *Pp*) donne $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$, &

con-

conſéquemment auſſi $udt = \frac{-aandu}{aa+uu}$, ou $\int udt$ ($ATUH$) $= a \times \int \frac{-andu}{aa+uu}$. Donc $ATUH = -a \times P\Lambda + q$. Mais le cas de TU en AH, rendant $ATUH = 0$, AL en $A\Omega$, $\Pi\Lambda$ en SX, & conſéquemment auſſi $P\Lambda$ en QX; cette intégrale s'y réduit à $0 = -a \times QX + q$, d'ou réſulte $q = a \times QX$. Donc cette intégrale préciſe ſera $ATUH = a \times QX - a \times P\Lambda = a \times YX = AD \times YX$. Mais ſuivant le Lem. 2. pag. 248. de 1709. les eſpaces ici parcourus pendant les temps AT (t) doivent être entr'eux comme les aires correſpondantes $ATUH$. Donc ces eſpaces ſont pareillement ici entr'eux comme les produits $AD \times YX$ correſpondans, c'eſt-à-dire (à cauſe de AD conſtante) comme les ſimples XY correſpondantes deſquelles X eſt l'origine fixe; & au parcouru pendant tout le temps AM, c'eſt-à-dire (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiere extinction des viteſſes dans le milieu réſiſtant ſuppoſé, comme les produits correſpondans $AD \times XY$ au produit $AD \times XQ$ valeur de l'aire totale $AMUH$, ou ſimplement comme les XY correſpondantes ſont à XQ, ou bien auſſi comme les ZG correſpondantes ſont à la conſtante ZA.

COROLLAIRE XI.

Ce raport des eſpaces ici parcourus nonobſtant les réſiſtances ſuppoſées, trouvé (*Corol.* 10) par le moïen de l'arc DXF de la Logarithmique HDF, peut encore ſe trouver par le moïen de ſon autre arc $D\psi H$, & d'une hyper-

hyperbole équilatere $D\phi H$ dont le centre soit A, & le demi-axe transverse AD (a).

Pour le voir soient prolongées $H\Omega$, UL, jusqu'à cette hyperbole en ϕ, μ, d'où soient menées $\phi\theta$, $\mu\gamma$, paralleles à HA, & qui rencontrent son axe $AD\theta$ en θ, γ, & la Logarithmique en ψ, v, desquels points soient aussi ψB, $v\delta$, paralleles à cet axe, & qui rencontrent AH en B, δ. Soit enfin ε le point où $U\mu$ rencontre AH, à laquelle soit aussi gm parallele menée de l'extrémité m de l'élement vm de la Logarithmique, & qui rencontre $v\delta$ en g.

Cela fait, l'hyperbole $D\phi H$ donnant $\sqrt{aa+uu} = \varepsilon\mu = \delta v$, & conséquemment $vg = \frac{udu}{\sqrt{aa+uu}}$, la Logarithmique FDH donnera δv ($\sqrt{aa+uu}$) à sa soûtangente (a) :: $vg\left(\frac{udu}{\sqrt{aa+uu}}\right). mg = \frac{-audu}{aa+uu}$. Or l'art 2. de la préced. Solut. donnant $dt = \frac{-audu}{aa+uu}$, donne aussi $udt = \frac{-aaudu}{aa+uu} = -a \times \frac{audu}{aa+uu}$. Donc $udt = -a \times mg$. Par conséquent en prenant encore AD (a) pour l'unité, l'intégrale en sera $\int udt$ ($ATUH$) $= -a \times A\delta + q$. Mais le cas de TU en AH, qui rend encore $ATUH = 0$, & AL en $A\Omega$, rendant de plus $\varepsilon\mu$ en $H\phi$, δv en $B\psi$, & conséquemment $A\delta = AB$; réduit cette intégrale à $0 = -a \times AB + q$, d'où résulte $q = a \times AB$. Donc cette intégrale complette sera $ATUH = a \times AB - a \times A\delta = a \times B\delta = AD \times B\delta$. Donc (*Lem.* 2. *pag.* 248. de 1709.) les espaces parcourus pendant les temps AT (t) se-

feront ici entr'eux comme les produits $AD \times B\delta$ correfpondans, ou comme les fimples $B\delta$ correfpondantes, defquelles B eft l'origine fixe; & au parcouru pendant tout le temps AM, c'eft-à-dire (*Corol.* 1.) jufqu'à l'entiere extinction des viteffes dans le milieu réfiftant fuppofé, comme ces produits $AD \times B\delta$ au produit $AD \times BA$ valeur de l'aire totale $AMUH$, ou comme les fimples $B\delta$ correfpondantes font à la conftante BA.

COROLLAIRE XII.

Il fuit de ces deux Corol. 10. & 11. que l'on aura ici $ZG = B\delta$, & $ZA = BA$: puifque $AD \times XY$ (*Corol.* 10.) $= ATUH$ (*Corol.* 11.) $= AD \times B\delta$, & $AD \times XQ$ (*Corol.* 10.) $= AMUH$ (*Corol.* 11.) $= AD \times BA$, donnent $B\delta = XY = ZG$, & $BA = XQ = ZA$. Donc la Logarithmique HDF doit donner ici $B\psi . AD :: AD . ZX$. Et $B\psi . \delta v :: G\lambda . ZX$.

COROLLAIRE XIII.

Pour comparer prefentement l'efpace parcouru pendant chaque temps AT en vertu des viteffes TU reftantes des primitives TV malgré les réfiftances fuppofées, avec ce que le mobile en auroit parcouru pendant le même temps dans un milieu fans réfiftance ni action en vertu des viteffes entieres primitives TV décroiffantes (*hyp.*) en raifon des temps qui refteroient à écouler jufqu'à leur entiere extinction dans ce milieu; le Lem. 2. pag. 248. de 1709. fait voir

1°. Que le premier de ces efpaces parcouru pen-

pendant le tems AT malgré les résistances supposées, seroit ici au second parcouru pendant le même tems dans un milieu sans résistance : : $ATUH$. $ATVF$ (*Corol.* 10.) : : $AD \times YX$. $\frac{AF + TV}{2} \times AT$.

2°. Qu'en supposant T en M, ou $AT = AM$ de part & d'autre, l'espace parcouru dans le milieu résistant pendant tout le tems AM, c'est à dire (*Corol.* 1.) jusqu'à l'entiere construction des vitesses TU par les résistances supposées de ce milieu, sera à ce que le mobile en auroit parcouru pendant ce même tems dans un milieu sans résistance : : $AMUH$. $AMNF$ (*Corol.* 10.) : : $AD \times XQ$. $\frac{AF + MN}{2} \times AM$.

3°. Et que le premier de ces espaces parcouru pendant tout le tems AM jusqu'à l'entiere extinction des vitesses TU dans le milieu résistant, doit pareillement être à ce que le mobile en auroit parcouru pendant tout le tems AC à la fin duquel les vitesses TV seroient aussi (*hyp.*) entierement éteintes dans le milieu sans résistance : : $AMUH$. ACF (*Corol.* 10.) : : $AD \times XQ$. $\frac{1}{2} AF \times AC$. (à cause de $AD = AC$) : : $2 XQ$. AF : : $2 AZ$. AF (*Corol.* 12.) : : BZ. AF.

COROLLAIRE XIV.

Le rapport des espaces ici parcourus pendant les tems AT (t) trouvé dans les précedens Corol. 10. & 11. peut encore se trouver

en

en continuant la division du second membre $\frac{-aadu}{aa+uu}$ de l'équation $udt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ resultante de $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ trouvée pour celle de la Courbe *HUC* dans l'art. 2. de la Solution précedente.

Car cette division continuée donnant $udt = -udu + \frac{u^3du}{aa} - \frac{u^5du}{a^4} + \frac{u^7du}{a^6}$ — &c. donnera aussi, en intégrant, $\int udt$ (*ATUH*) $= -\frac{uu}{2} + \frac{u^4}{4aa} - \frac{u^6}{6a^4} + \frac{u^8}{8a^6}$ — &c. $+q$. Mais le cas de *ATUH* $=0$, rendant *TU* $(u) = AH$ (a), réduit cette intégrale à $0 = -\frac{aa}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{8}$ — &c. $+q$, d'où résulte $q = \frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} + \frac{aa}{6} - \frac{aa}{8}$ + &c. Donc cette intégrale complette sera *ATUH* $= \frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} + \frac{aa}{6} - \frac{aa}{8}$ + &c. $- \frac{uu}{2} + \frac{u^4}{4aa} - \frac{u^6}{6a^4} + \frac{u^8}{8a^6}$ — &c. $= \frac{aa}{2\times 1} - \frac{aa}{2\times 2} + \frac{aa}{2\times 3} - \frac{aa}{2\times 4}$ + &c. $- \frac{uu}{2\times 1} + \frac{u^4}{2\times 2aa} - \frac{u^6}{2\times 3a^4} + \frac{u^8}{2\times 4a^6}$ — &c. Donc (*Lem.* 2. *pag.* 248. de 1709.) les espaces parcourus pendant les temps *AT* (t) seront ici entr'eux comme ces valeurs des aires *ATUH* correspondantes, desquelles valeurs il est visible que les deux suites ou *series*, tant la constante que la variable, sont aisées à continuer à l'infini.

Il

Il résulte auſſi de ces valeurs que $2 \times ATUH$ $= \frac{aa}{1} - \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} \quad \frac{aa}{4} + \&c. - \frac{uu}{1} + \frac{u^4}{2aa} - \frac{u^6}{3a^4} + \frac{u^8}{4a^6} - \&c.$

COROLLAIRE XV.

Tout ce qu'on voit de la fig. 1. dans la fig. 2. y demeurant le même que là, ſoit FI parallele à AD, & rencontrée en ϕ par ΩD prolongée de ce côté-là. Entre les aſymptotes orthogonales $\phi\Omega$, ϕI, ſoit une hyperbole équilatere quelconque $I\Delta\Omega$ rencontrée en Δ, Ω, par AD, $H\Omega$, prolongées juſqu'à elle. Enſuite après avoir pris DB troiſiéme proportionnelle à ϕD (a), DL (u), menez les ordonnées infiniment proches BG, bg, paralleles à $D\Delta$, & qui rencontrent l'hyperbole $I\Delta\Omega$ en G, g.

Cela fait, on aura $DB = \frac{uu}{a}$, d'où réſultera $Bb = \frac{2udu}{a}$, & $\phi B = a + \frac{uu}{a} = \frac{aa+uu}{a}$: De ſorte qu'appellant $D\Delta$, c; l'on aura ϕB $\left(\frac{aa+uu}{a}\right)$. $\phi D (a) :: D\Delta (c)$. $BG = \frac{aac}{aa+uu}$. Par conſéquent $BG \times Bb$ $(GBbg) = \frac{2acudu}{aa+uu} = \frac{2c}{a} \times \frac{aaudu}{aa+uu}$ (l'art. 2. de la Solut. donnant $udt = \frac{-aaudu}{aa+uu}$) $= -\frac{2c}{a} \times udt$, ou $udt = -\frac{a}{2c} \times GBbg$. Donc (en intégrant) $\int udt$ $(ATUH) = -\frac{a}{2c}$

$\times \Delta$

$\times \Delta DBG + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, rendant $TU = AH$, ou $DL = D\Omega$, c'eſt-à-dire $u = a$, & conſéquemment $DB \left(\frac{uu}{u}\right) = \frac{aa}{a} = a = D\Omega$, rend auſſi $\Delta DBG = \Delta D\Omega\Omega$; ce qui réduit cette intégrale à $0 = -\frac{a}{2c} \times \Delta D\Omega\Omega + q$, d'où réſulte $q = \frac{a}{2c} \times \Delta D\Omega\Omega$. Donc cette intégrale complette eſt $ATUH = \frac{a}{2c} \times \Delta D\Omega\Omega - \frac{a}{2c} \times \Delta DBG = \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$; d'où reſulte auſſi $AMUH = \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega D\Delta$. Par conſéquent les eſpaces ici parcourus pendant les temps écoulés AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$ malgré les réſiſtances ſuppoſées, doivent être entr'eux comme les produits $\frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$ correſpondans, ou ſimplement (à cauſe de la fraction $\frac{a}{2c}$ conſtante) comme les aires hyperboliques aſymptotiques $\Omega\Omega BG$ correſpondantes ; & à l'eſpace entier parcouru malgré ces réſiſtances pendant tout le temps AM, ou (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiere extinction des viteſſes TU ou DL par ces mêmes réſiſtances :: $\frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG . \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega D\Delta :: \Omega\Omega BG . \Omega\Omega D\Delta$.

COROLLAIRE XVI.

Donc auſſi les eſpaces ici à parcourir pendant les temps *TM* ou (*Solut. art.* 4.) ΠD qui reſtent à écouler juſqu'à cette entiere extinction de viteſſes dans le milieu réſiſtant ſuppoſé, ſeront pareillement entr'eux comme les aires hyperboliques ΔDBG correſpondantes, ainſi que M. *Newton* l'a marqué dans la pag. 255. de ſes *Princ. Math.* où il ne fait mention que de ces dernieres aires hyperboliques & de ces derniers eſpaces, dont l'origine eſt à l'extinction & non au commencement des viteſſes, ſans en avertir; ce qui ſoit dit pour l'intelligence de cet Auteur.

COROLLAIRE XVII.

Puiſque (*Corol.* 15.) $udt = -\frac{a}{2c} \times GBbg$, & conſéquemment $u = -\frac{a}{2c} \times \frac{GBbg}{dt}$ (l'art. 4. de la Solut. donnant $dt = \Pi\pi$) $= -\frac{a}{2c} \times \frac{GBbg}{\Pi\pi}$; les viteſſes reſtantes *TU* (u) à la fin des temps écoulés *AT* ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$ malgré les réſiſtances ſuppoſées, doivent être par tout ici entr'elles comme les fractions $\frac{a}{2c} \times \frac{GBbg}{\Pi\pi}$, ou $\frac{GBbg}{\Pi\pi}$ correſpondantes.

COROLLAIRE XVIII.

Puiſque (*Corol* 15.) $Bb = \frac{2udu}{a}$, $GBbg$ $=$

$= -\frac{2c}{a} \times udt$; & que l'hyperbole $I\Delta\Omega$ donnant $\phi B \times BG = \phi D \times D\Delta = ac$, donne aussi $BG = \frac{ac}{\phi B}$; l'on aura ici $-\frac{2cudt}{a} = GBbg = BG \times Bb = \frac{ac}{\phi B} \times \frac{2udu}{a} = \frac{2cudu}{\phi B}$, & conséquemment $-\frac{dt}{a} = \frac{du}{\phi B} = \frac{Ll}{\phi B}$ en menant le rayon $A\pi$ jusqu'à la rencontre de $D\Omega$ en l; d'où résulte $dt = a \times \frac{Ll}{\phi B}$, c'est-à-dire, les instans dt, ou (*Solut. art.* 4.) $\Pi\pi$ en raison des fractions $a \times \frac{Ll}{\phi B}$ ou simplement $\frac{Ll}{\phi B}$ correspondantes, ainsi que M. *Newton* l'a aussi marqué dans la pag. 256. de ses *Princ. Math.*

COROLLAIRE XIX.

Si présentement on suppose que l'axe transverse jusqu'ici arbitraire de l'hyperbole $I\Delta\Omega$, soit $= \phi D \times \sqrt{2}$, ensorte qu'elle ait ici $D\Delta = \frac{1}{4}\phi D$, ou $c = \frac{1}{4}a$; il suit du Corol. 15. qu'un corps de pesanteur constante étant jetté directement de bas en haut d'une vitesse AF ou AH dans un milieu résistant en raison des quarrés des vitesses actuelles ou restantes de ce corps, l'espace qu'il y parcouroit pendant le temps AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$, seroit à ce que cette vitesse AF ou AH lui en feroit parcourir pendant un pareil temps si elle demeuroit uniforme : $\Omega\Omega BG . SA\Pi$.

Car (*Lem.* 2. *pag.* 248. de 1709.) le premier de ces deux espaces seroit au second : : $ATUH$. AT

$AT \times AF$. Mais le Corol. 15. donne $ATUH$ $= \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$ (à cauſe de $c = \frac{1}{4}a$) $= 2 \times \Omega\Omega BG$. Donc le premier de ces deux eſpaces feroit au ſecond :: $2 \times \Omega\Omega BG$. $AT \times AF$ (la Solution donnant $AT = S\Pi$, & $AF = AH = AS$) :: $2 \times \Omega\Omega BG$. $S\Pi \times AS$ :: $\Omega\Omega BG$. $\frac{1}{2} S\Pi \times AS$ :: $\Omega\Omega BG$. $SA\Pi$. C'eſt-à-dire, comme l'eſpace hyperbolique aſymptotique $\Omega\Omega BG$ eſt au ſecteur circulaire $SA\Pi$, ainſi que M. *Newton* l'a trouvé dans la pag. 259. de ſes *Princ. Math.*

COROLLAIRE XX.

On voit de-là que l'eſpace parcouru pendant tout le temps AM, c'eſt-à-dire (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiere extinction des viteſſes du corps jetté de la premiere AF ou AH directement de bas en haut dans le milieu ſuppoſé réſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles de ce corps, feroit à ce que ce même corps en parcourroit pendant le même temps AM, ſi le mouvement de cette premiere viteſſe AF ou AH en demeuroit uniforme :: $\Omega\Omega D\Delta$. SAD. Et conſéquemment auſſi que l'eſpace parcouru de bas en haut avec les viteſſes retardées pendant le temps TM ou (*Solut. art.* 4.) ΠD à écouler juſqu'à leur entiere extinction, feroit à ce que l'uniforme en feroit parcourir au mobile pendant ce même temps TM ou ΠD :: $GBD\Delta$. ΠAD.

COROLLAIRE XXI.

En ſuppoſant encore $D\Delta = \frac{1}{4}\phi D$, ſi par le point Δ on fait $X\omega$ parallele à $\Omega\phi$, & qui rencontre $\Omega\Omega$, ϕI, en X, ω; on trouvera que des deux eſpaces parcourus l'un & l'autre juſqu'à extinction de viteſſes par un même corps de peſanteur conſtante ſucceſſivement jetté d'une même viteſſe AH ou AF de bas en haut ſuivant des verticales ou des plans également inclinés à l'horizon dans deux milieux dont un lui réſiſte en raiſon des quarrés de ſes viteſſes actuelles, & l'autre point du tout; le parcouru dans le milieu réſiſtant ſeroit au parcouru dans le milieu ſans réſiſtance :: $\Omega\Omega D\Delta . \omega\phi D\Delta$.

Car puiſque (*hyp.*) le ſecond de ces deux eſpaces doit être parcouru en vertu des viteſſes primitives TV juſqu'à leur entiere extinction en C dans le milieu ſans réſiſtance, & le premier en vertu des viteſſes TU reſtantes de celles-là dans le milieu réſiſtant juſqu'à leur entiere extinction (*Corol.* 1.) en M; celui-ci ſera à l'autre (*Lem.* 2. *pag.* 248. *de* 1709.) :: $AMUH . ACF$ :: $AMUH . \frac{AC \times AF}{2}$ (*Corol.* 15.) :: $\frac{4}{2c} \times \Omega\Omega D\Delta . \frac{AC \times AF}{2}$ (*Solut. art.* 1. & *Corol.* 15.) :: $\frac{AC}{2D\Delta} \times \Omega\Omega D\Delta . \frac{AC \times AF}{2}$ :: $\Omega\Omega D\Delta . AF \times D\Delta$ :: $\Omega\Omega D\Delta . D\phi \times D\Delta$ :: $\Omega\Omega D\Delta . \omega\phi D\Delta$. C'eſt à dire que la hauteur du premier des deux jets ſuppoſés, fait de bas en haut dans le milieu réſiſtant juſqu'à extinction de viteſſes,

ſera ici à la hauteur du ſecond fait auſſi de bas en haut juſqu'à extinction de viteſſes dans le milieu ſans réſiſtance, comme l'aire hyperbolique aſymptotique $\Omega\Omega D\Delta$ eſt au rectangle correſpondant $\omega\phi D\Delta$. De ſorte que $D\Omega = D\phi$ rendant $X\Omega D\Delta = \omega\phi D\Delta$, chacune de ces deux hauteurs ſera à leur difference ou à l'excès dont la ſeconde ſurpaſſera la premiere, comme chacune des aires $\Omega\Omega D\Delta$, $\omega\phi D\Delta$, eſt à l'hyperbolique ΩDX.

COROLLAIRE XXII.

Mais on ſait que ſi les ordonnées hyperboliques aſymptotiques $D\Delta$, bg, BG, &c. ou leurs abſciſſes ϕD, ϕb, ϕB, &c. ſont en progreſſion géometrique quelconque, les aires hyperboliques $Dbg\Delta$, $bBGg$, &c. compriſes alors entre des ordonnées proportionelles, ſont égales entr'elles; & conſéquemment que toutes les aires compriſes entre l'hyperbole $I\Delta\Omega$, ſon aſymptote $\phi\Omega$, & deux de ſes ordonnées quelconques paralleles à ſon autre aſymptote ϕI, leſquelles ſoient entr'elles :: $D\Delta . \Omega\Omega :: \phi\Omega . \phi D :: 2 . 1$. ſont chacune égale à $\Omega\Omega D\Delta$. Donc (*Corol.* 21.) la hauteur du premier des deux jets précedens, fait de la viteſſe AH ou AF directement de bas en haut dans le milieu reſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles du corps jetté, ſera à la hauteur du ſecond fait auſſi de la même viteſſe AH ou AF directement de bas en haut ſuivant la même ligne que l'autre; comme chacune de ces aires hyperboliques aſymptotiques compriſes entre l'hyperbole $I\Delta\Omega$, ſon aſymptote $\phi\Omega$, & deux de ſes ordonnées paralleles à ϕI, leſ-

lesquelles soient entr'elles : : 2. 1. sera au rectangle $\omega\phi D\Delta$ de la même hyperbole, ainsi que M. *Huygens* l'a dit dans la page 174. de son *Discours de la Cause de la pesanteur.*

C'est-là une des Propositions que M. Huygens *s'est contenté d'avancer sans démonstration dans les pag.* 170. 171. 172. 173. 174. 175. & 176. *de son* Discours de la Cause de la Pesanteur, *touchant les mouvemens faits dans des milieux résistans, & la derniere qui nous restât à démontrer, toutes les autres l'étant dans les Mem. de* 1707. *pag.* 508. & 516. *dans ceux de* 1708. *pag.* 157. 184. 272. 394. *&c. & ci-dessus dans le Corol.* 2.

COROLLAIRE XXIII.

Le raport des espaces trouvés ci-dessus depuis le Corol. 10. jusqu'ici, peut encore se trouver par le moyen d'une hyperbole équilatere $\Omega Y\theta$ décrite du centre A par l'angle Ω du quarré DH entre les asymptotes AD, AH, prolongées vers Δ, θ : si l'on prolonge les ordonnées QS, $P\Pi$, $p\pi$, jusqu'à la rencontre de cette hyperbole en Y, Z, z ; les espaces parcourus pendant les temps AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$, en vertu des vîtesses TU restantes des primitives TV, se trouveront être ici entr'eux en raison des aires hyperboliques asymptotiques $YQPZ$ correspondantes, dont QY sera l'origine, & $D\Omega$ le terme.

Car cette hyperbole $\Omega Y\theta$ donnera $PZ = \frac{A\Gamma \times D\Omega}{AP} = \frac{aa}{AP}$ (l'art. 4. de la Solut. donnant $AP = \frac{aa}{\sqrt{aa+uu}}$) $= \sqrt{aa+uu} = AL$. De plus cet

 art.

art 4. de la Solut. donne auſſi $Pp =$ $= \frac{-aadu}{aa+uu \times \sqrt{aa+uu}}$. Donc $PZ \times Pp$ ($ZPpz$) $= \frac{-aadu}{aa+uu}$ (*Corol.* 10.) $= udt$. Par conſéquent $\int udt$ ($ATUH$) $= \int PZ \times Pp = OAPZO + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, qui rend TU en AH, AL en $A\Omega$, & PZ en $Q\Upsilon$, rendant auſſi $OAPZO = OAQ\Upsilon O$; reduit cette intégrale à $0 = OAQ\Upsilon O + q$, d'où reſulte $q = - OAQ\Upsilon O$. Donc cette intégrale préciſe eſt $ATUH = OAPZO - OAQ\Upsilon O = \Upsilon QPZ$. Donc auſſi (*Lem.* 2. *pag.* 248. de 1709.) les eſpaces parcourus pendant les temps AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$, ſeront ici entr'eux comme les aires hyperboliques aſymptotiques ΥPQZ correſpondantes deſquelles $Q\Upsilon$ eſt l'origine ; & à l'eſpace entier parcouru pendant tout le temps AM, c'eſt-à-dire (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiere extinction des viteſſes TU par les réſiſtances ſuppoſées, comme ces aires hyperboliques ΥQPZ ſont à l'aire entiere $\Upsilon QD\Omega$ compriſe entre les ordonnées fixes & conſtantes $Q\Upsilon$, $D\Omega$: De ſorte que le reſte de l'aire infinie compriſe entre l'hyperbole $\Omega\Upsilon O$ & ſes aſymptotes $A\Delta$, AO, eſt ici inutile.

COROLLAIRE XXIV.

Puiſque (*Solut. art.* 1. 2.) les réſiſtances inſtantanées (dr) du milieu à la fin des temps AT, ſont ici exprimées par $z = \frac{uu}{a}$, de même que les viteſſes reſtantes alors TU ou DL par u; & que (*Corol.* 15.) $DB = \frac{uu}{a} = z$; il

eſt

eſt manifeſte que ces réſiſtances inſtantanées doivent être ici exprimées par DB, comme les viteſſes reſtantes malgré ces réſiſtances & malgré la peſanteur du mobile, y ſont exprimées par TU ou DL. Ainſi non ſeulement les DL ſeront ici entr'elles comme ces viteſſes reſtantes (u) à la fin du temps AT ou (*Solut. art.* 4.) $S\Pi$; mais encore les DB y ſeront pareillement entr'elles comme les réſiſtances inſtantanées (dr) que le milieu ſuppoſé fait à ces viteſſes; & de maniere que les DL ou TU ($TV-RV$) étant priſes ici (*hyp.*) pour ces viteſſes reſtantes des primitives TV, les DB correſpondantes doivent auſſi être priſes pour les réſiſtances inſtantanées du milieu ſuppoſé.

COROLLAIRE XXV.

Les trois équations $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a}$, $z = \frac{uu}{a}$, & $v = a - t$, ou $dv = -dt$, de l'art. 2. de la Solut. donnant $\frac{adr}{uu} = \frac{dt}{a} = \frac{-dv}{a}$, l'on aura ici $dr. -dv :: \frac{uu}{a}. a$ (*Corol.* 15.) $:: DB. D\phi$. C'eſt-à-dire ſuivant la remarq. 1. de la pag. 161. des Mem. de 1708. que les réſiſtances inſtantanées faites à la fin des temps AT par le milieu ſuppoſé, ſeront par tout ici chacune à la peſanteur conſtante du mobile, ou à ce que cette peſanteur fait auſſi de réſiſtance au mouvement de ce corps jetté (*hyp.*) directement de bas en haut $:: DB. D\phi$. Donc en prenant (*Corol.* 24.) DB pour chacune des réſiſ-

 tances

tances instantanées du milieu supposé, l'on aura aussi $D\phi$ pour celle de la pesanteur du mobile à chaque instant. Par conséquent ϕB sera tout ce que cette pesanteur & le milieu font ensemble de résistance à chaque instant au mouvement supposé de bas en haut. Or en imaginant l'aire hyperbolique $\Omega\Omega BG$ divisée en parties égales quelconques par des lignes GB paralleles à ΔD, c'est-à-dire (*Corol.* 15.) les espaces ici parcourus de bas en haut pendant les temps AT, divisés en parties égales quelconques ; on sait que les ϕB correspondantes seront en progression geometrique. Donc les résistances entieres instantanées résultantes tout à la fois du milieu supposé & de la pesanteur du corps mû de bas en haut, au commencement ou à la fin de ces parties égales d'espace parcouru, c'est-à-dire, les résistances entieres faites de chaque instantanée correspondante du milieu résistant, ajoûtée à la pesanteur constante de ce corps, seroient aussi entr'elles en progression géometrique.

COROLLAIRE XXVI.

De ce que (*Corol.* 24. & 25) $D\phi$ ou $D\Omega$, DL, DB, expriment ici la pesanteur du mobile, ses vitesses restantes à la fin des temps AT, & les résistances instantanées que lui fait le milieu à la fin de ces temps ; ces trois choses seront ici entr'elles comme ces trois grandeurs correspondantes $D\Omega$, DL, DB, dont la seconde (*Corol.* 15.) est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

Co-

COROLLAIRE XXVII.

Pour comparer preſentement les eſpaces parcourus pendant des temps quelconques *AT* dans le milieu réſiſtant juſqu'ici ſuppoſé, en vertu des viteſſes *TU* reſtantes (*Solut.*) des primitives *TV* qui dans un milieu ſans réſiſtance feroient ſeulement retardées (*hyp.*) en raiſon des temps *TC* à écouler juſqu'à leur entiere extinction dans ce milieu; pour comparer, dis-je, ces eſpaces avec les parcourus pendant le même temps *AT* dans le milieu réſiſtant en vertu des viteſſes pareillement reſtantes de primitivement accelerées en raiſon des temps écoulés *AT*: par exemple, pour comparer les hauteurs d'aſcenſions verticales avec les hauteurs des chutes verticales d'un corps de peſanteur conſtante dans un milieu réſiſtant en raiſon des quarrés des viteſſes actuelles de ce corps; tout ce qu'on voit de la fig. 1. dans la fig. 3. y demeurant le même que là, ſoit par *D* l'arc logarithmique ϕDH le même que ψDF dans une poſition renverſée de la ſienne, ayant auſſi-bien que lui *HF* pour aſymptote de laquelle il s'approche du côté de *H* comme il fait dans l'autre poſition du côté de *F*, & ſa ſoutangente $= AD\,(a) = 1$. Soit de plus par l'extremité *H* de la droite *AH* ſur l'aſymptote *DC* une autre Logarithmique *HBC* d'une ſoutangente $= \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} AD$ $(\frac{1}{2} a) = \frac{1}{2}$, laquelle s'écarte de ſon aſymptote *AC* du côté de *C*, & ſoit rencontrée en *B* par *TU* prolongée laquelle rencontre auſſi en β la droite ΩH prolongée vers *C*. Enſuite

après avoir pris $TW = \frac{AT \times B\beta}{AH + BT}$ ſur toutes les TU prolongées juſqu'à cette Logarithmique HBC, ſoit imaginée une Courbe AWC qui paſſe par tous les points W ainſi trouvés, & qui ſoit rencontrée en O par MO parallele à AH. De ſes points W, O, ſoient menées $W\delta$, $O\omega$, paralleles à CD, & qui rencontrent le quart de cercle HSD en δ, ω, deſquels points ſoient $\delta\mu$, $\omega\nu$, paralleles à HF, & qui rencontrent l'arc logarithmique ϕDH, en μ, ν, deſquels points ſoient auſſi menées les droites $\mu\pi$, $\nu\theta$, paralleles à DA, & qui rencontrent HF en π, θ. Soit enfin le quarré $ACCF$ avec ſa diagonale AC qui rencontre TV en u.

Cela fait, concevons (dis-je) preſentement un corps de peſanteur conſtante, duquel par conſéquent dans un milieu ſans réſiſtance ni action, tel qu'on ſuppoſe d'ordinaire le vuide; les viteſſes primitives Tu en deſcendant augmentent en raiſon des temps écoulés AT; & les viteſſes primitives TV en remontant en vertu d'une viteſſe initiale $AF = AH$, diminuent au contraire en raiſon des temps TC à écouler juſqu'à leur entiére extinction en C dans ce vuide ou eſpace ſans réſiſtance ni action: le tout ainſi qu'on le penſe d'ordinaire avec *Galilée*. Concevons de plus que ces mouvemens, qui primitivement & ſans réſiſtance ni action de la part du milieu, ſeroient tels (*hyp.*) qu'on les vient de dire, ſe faſſent l'un & l'autre dans un milieu qui leur réſiſte effectivement, & en raiſon des quarrés de leurs viteſſes actuelles ou reſtantes des primitives ſuppoſées.

Cela

Cela ſuppoſé, l'on aura ici non-ſeulement (*Corol.* 10.) $ATUH = a \times YX = a \times ZG$; mais encore (*pag.* 257 *de* 1709. *Corol.6.art.5.*) $ATW = a \times A\pi$. Mais *TU* exprimant ici (*Solut.*) les viteſſes d'aſcenſion à la fin des temps *AT* dans le milieu réſiſtant ſuppoſé, & *TW* (*pag.* 251. *de* 1709. *Sol. art.* 4.) celles des chutes dans ce milieu à la fin des mêmes temps ; le Lem. 2. pag. 248. de 1709. fait voir que l'eſpace parcouru pendant le temps *AT* en montant dans ce milieu en vertu de la projection verticale faite de bas en haut de la viteſſe initiale *AH*, doit être ici au parcouru pendant le même temps & dans le même milieu en y retombant ſuivant la même ligne :: $ATUH . ATW :: a \times ZG . a \times ZG . A\pi :: A\pi$.

Par conſéquent en prenant $AT = AM$, c'eſt-à-dire *AM* pour la durée commune de ces deux mouvemens ; l'eſpace parcouru en vertu du mouvement acceleré de haut en bas pendant ce temps *AM* malgré les réſiſtances du milieu ſuppoſé, ſera au parcouru en même temps en vertu du mouvement retardé de bas en haut par ces réſiſtances & par la peſanteur du mobile, c'eſt-à-dire (*Corol.* 1.) juſqu'à l'entiére extinction de ce dernier mouvement :: $A\theta . AZ$. Puiſque le changement de *AT* en *AM*, change auſſi $A\pi$ en $A\theta$, & *ZG* en *ZA*.

COROLLAIRE XXVIII.

* Le raport des mêmes eſpaces d'aſcenſion & de chute verticales du même corps, faites

* FIG. IV.

dans le milieu suppofé réfiftant en raifon des quarrés des viteffes actuelles de ce corps: la premiere en vertu d'une viteffe AH de projection verticale de bas en haut, & la seconde en vertu de la pefanteur conftante du mobile; fe trouvera encore par le moïen de la Fig. 4. en fuppofant tout ce qu'on y voit de la Fig. 3. y être le même que dans cette Fig. 3. excepté que DXF, qui étoit là une logarithmique, doit être ici une hyperbole équilatere entre les afymptotes HF, $H\Omega$; lequel arc hyperbolique foit auffi en ΩYO entre les afymptotes AO, AD. Soient encore par les points ω, δ, S, Π, du quart de cercle HSD les droites ϕX, $\Delta\Lambda$, QY, PZ, paralleles à OF, dont les deux premieres ϕX, $\Delta\Lambda$ rencontrent l'arc hyperbolique DXF en X, Λ, & la droite $H\Omega$ en ϕ, Δ; les deux dernieres QY, PZ, rencontrant l'arc hyperbolique ΩYO en Y, Z, & la droite AD en Q, P.

Cela fait, le Corol. 23. donnera $ATUH = YQPZ$; le Corol. 7. pag. 258. de 1709. $ATW = D\Omega\Delta\Lambda$; & fuivant le Lem. 2. pag. 248. de 1709. la hauteur d'afcenfion parcouruë pendant le temps AT malgré la refiftance du milieu & la pefanteur du mobile, en vertu des viteffes retardées ou reftantes TU de la premiere AH de projection de bas en haut, fera à la hauteur de chute parcouruë pendant le même temps AT en vertu des viteffes TW accelerées depuis zero par la pefanteur de ce mobile malgré la réfiftance du même milieu : : $ATUH . ATW :: YQPZ . D\Omega\Delta\Lambda$.

Par conféquent la hauteur totale du jet vertical de bas en haut, fait (*hyp.*) de la viteffe AH jufqu'à fon entiere extinction (*Corol.* 1.) en

en M à la fin du temps AM qu'a duré cé jet, doit être ici à la hauteur de la chute verticale du même corps parcouruë pendant le même temps AM en vertu de sa pesanteur dans le même milieu supposé résistant en raison des quarrés des vitesses actuelles de ce corps :: $YQD\Omega$. $D\Omega\phi X$. Puisque AT en se changeant ici en AM, change aussi PZ en $D\Omega$, & $\Delta\Lambda$ en ϕX.

COROLLAIRE XXIX.

* Voici encore une troisiéme maniére de trouver le raport de ces espaces d'ascension & de chute, faites de la maniére supposée dans un milieu résistant en raison des quarrés des vitesses actuelles du mobile. Pour cela, ce qu'on voit dès les Fig. 3. 4. dans la Fig. 5. y demeurant le même que dans celles-là, excepté que la Courbe AWC des vitesses TW des chutes accelerées par la pesanteur du mobile malgré la résistance du milieu supposé, est ici renversée de gauche à droite de son axe AC pour moins d'embarras de lignes dans cette Fig. 5. aïant FC parallele à AC pour son asymptote au lieu de HC qu'elle avoit (*Corol.* 1. *pag.* 252. *de* 1709.) dans les Fig. 3. 4. Soit CF prolongée vers I, & ΩD prolongée jusqu'à sa rencontre en ϕ. Entre les asymptotes orthogonales $\phi\Omega$, ϕI, soit (comme dans la Fig. 2. du Corol. 15.) une hyperbole équilatere quelconque $I\Delta\Omega$ rencontrée en Δ, Ω, par AD, $H\Omega$, prolongées jusqu'à elle. Ensuite après avoir mené des points correspondans, U, W, des Courbes HUM, AWC, pa-

* FIG. V.

parallelement à $C\varphi$, les droites UL, WQ, jusqu'à leur rencontre avec $\varphi\Omega$ en L, Q, soient prises premierement. DB troisiéme proportionnelle à φD, DL, comme dans le Corol. 15. & secondement DZ troisiéme proportionelle à φD, DQ, comme dans les Corol. 9. & 18. des pag. 261. & 278. de 1709. Soient enfin des points B, Z, les ordonnées BG, ZY, paralleles à φI, & qui rencontrent l'hyperbole $Y\Delta\Omega$ en G, Y.

Cela fait, le Corol. 15. donnera $ATUH = \frac{a}{2c} \times \Omega\Omega BG$; les Corol 9. 18. des pag. 261. 278. de 1709. donneront aussi $ATW = \frac{a}{2c} \times \Delta DZY$; & suivant le Lem. 2. pag. 248. de 1709. la hauteur d'ascension verticale parcouruë pendant le temps AT malgré la pesanteur du mobile & les résistances du milieu supposé, en vertu des vitesses rètardées TU restantes de la premiere AH de projection verticale de bas en haut, sera à la hauteur de chute verticale parcouruë pendant le même temps AT en vertu des vitesses TW de chute accelerée depuis zero par la pesanteur constante du mobile malgré la résistance de ce même milieu :: $ATUH . ATW : \Omega\Omega BG . \Delta DZY$.

Par conséquent la hauteur totale du jet vertical de bas en haut, fait (*hyp.*) de la vitesse AH jusqu'à son entiére extinction (*Corol.* 1.) en M à la fin du temps AM que ce jet a duré, doit être ici à la hauteur de la chute verticale du même corps, faite pendant le même temps AM en vertu de la pesanteur constante de ce corps dans le même milieu supposé résistant en raison des quarrés des vitesses de ce même

me

me corps :: $\Omega\Omega D\Delta . \Delta DX\psi$. en ſuppoſant DX troiſiéme proportionelle à φD, DE côté du rectangle $DMOE$, & $X\psi$ parallele à φI; puiſque le changement qui ſe fait ici de AT en AM, ou de UW en MO, rendant (*Corol.* 1.) TU ou $DL=0$, $DQ=DE$, rend pareillement $DB=0$, $DZ=DX$; & conſéquemment auſſi $\Omega\Omega BG=\Omega\Omega D\Delta$; & $\Delta DZY=\Delta DX\psi$.

COROLLAIRE XXX.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précédent Corol. 29. ſi l'on ajoûte à la Fig. 5. une hyperbole équilatere DPI décrite du centre A, d'un axe tranſverſe $=2AD$, & que de ce centre A par les points E, Q, L, on mene les droites AE, AQ, AL, dont les deux premieres AE, AQ, prolongées rencontrent cette hyperbole en R, P, & la troiſiéme AL le quart de cercle HSD en Π; cette Fig. 5. fournira tout à la fois les expreſſions des viteſſes, tant retardées d'aſcenſion reſtantes de l'initiale AH égale à la terminale (*Corol.* 2. *pag.* 252. 253. de 1709.) AF du mobile, qu'accelerées par la peſanteur de ce mobile, de part & d'autre malgré les réſiſtances ſuppoſées; les expreſſions des temps à la fin deſquels ces viteſſes ſe trouvent; & des eſpaces parcourus en vertu d'elles pendant ces temps: les ordonnées TU, TW, exprimeront (*Solut. préced.* & *Solut. art.* 4. *pag.* 251. *de* 1709.) ces viteſſes retardées d'aſcenſion, & accelerées de chute dans le milieu réſiſtant ſuppoſé; les ſecteurs circulaires $SA\Pi$, & les hyperboliques DAP (*Sol. préced. art.* 4. & *Sol.* 2. *art.* 2. *pag.* 273. *de* 1709.) les temps AT à la

à la fin desquels elles se trouvent; les aires hyperboliques $\Omega\Omega BG$, ΔDZY, les espaces ou hauteurs verticales parcouruës (*Corol.* 15. *préced.* & *Corol.* 9. 18. *pag.* 261. 278. *de* 1709.) en vertu de ces vitesses pendant ces temps. Par conséquent l'ordonnée *MO* de la Courbe *AWC* exprimera la derniere des vitesses accelerées de chute faite pendant le temps *AM*, à la fin duquel les vitesses retardées, *AH*, *TU*, se trouvent (*Corol.* 1.) entiérement éteintes; les secteurs *SAD*, *DAR*, exprimeront chacun ce temps *AM*; & les aires hyperboliques asymptotiques $\Omega\Omega D\Delta$, $\Delta DX\psi$, les hauteurs parcouruës en montant pendant ce temps, & en retombant pendant un pareil temps $=AM$: c'est-à-dire que la hauteur du jet vertical jusqu'à l'entiére extinction de la vitesse *AH* de projection de bas en haut, sera à la hauteur de chute verticale accelerée faite pendant le même temps *AM* (le tout malgré les résistances supposées) :: $\Omega\Omega D\Delta$. $\Delta DX\psi$.

La précédente Solution & la 2e de la pag. 272. de 1709. font voir non-seulement que les secteurs circulaires $SA\Pi$ & hyperboliques *DAP* expriment les temps *AT* à la fin desquels se trouvent les vitesses *TU*, *TW*, d'ascension & de chute, restantes malgré les résistances supposées; mais encore que les correspondans à la même *AT* sont égaux entr'eux, puisque suivant ces deux Solutions $SA\Pi = \frac{1}{2}a \times AT = DAP$. D'où il suit aussi que $SAD = DAR$: c'est-à-dire que les deux secteurs *SAD*, *DAR*, correspondans à la même *AM*, sont pareillement égaux entr'eux.

Ce

Ce dernier Corol. 30. *avec les Corol.* 18. 19. *& le Probl.* 2. *pag.* 513. *&c. des Mem. de* 1707. *renferment tout ce que M.* Newton *a donné dans ses* Princ. Math. *Liv.* 2. *Sect.* 2. *sur les mouvemens faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses du mobile, qui est l'hypothese dont il s'agit ici.*

AUTRE SOLUTION.

I. Soit $\frac{a^4}{xx} = aa + uu$, ou $u = \sqrt{\frac{a^4}{xx} - aa} = \frac{a}{x}\sqrt{aa - xx}$. l'on aura $du = \frac{-adx\sqrt{aa-xx} - \frac{axxdx}{\sqrt{aa-xx}}}{xx}$ $= \frac{-a^3dx + axxdx - axxdx}{xx\sqrt{aa-xx}} = \frac{-a^3dx}{xx\sqrt{aa-xx}}$, ou $-du = \frac{a^3dx}{xx\sqrt{aa-xx}}$. Donc $\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{-aadu}{aa+uu}$ (*Solut.* 1. *art.* 2.) $= dt$; & cette équation differentielle s'intégrera par le moïen du quart de cercle *HSD* de la Fig. 1. en y appellant encore $A\Pi$, a; & de plus AP, x; & conséquemment aussi ΠP, $\sqrt{aa-xx}$: car aïant ici $P\Pi$ ($\sqrt{aa-xx}$). $A\Pi$ (a) :: πO (dx). $\Pi\pi = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} = dt$, l'on aura (en intégrant) t (AT) $= H\Pi + q$.

II. Mais en supposant l'angle $DA\Omega$ de 45. deg. qui donnera AS (a) $= \sqrt{AQ^2 + SQ^2}$ $= \sqrt{2 \times AQ^2} = AQ \times \sqrt{2}$, & conséquemment $AQ = \frac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; le cas de AP (x) $= AQ$ ($a\sqrt{\frac{1}{2}}$)

($a\sqrt{\frac{1}{2}}$) rendant non seulement $H\Pi = HS$, mais encore $xx = \frac{aa}{2}$, & conséquemment $2aa =$
$= \frac{a^4}{xx}$ (*art.* 1.) $= aa + uu$, c'est-à-dire $aa = uu$, ou u (TU) $= a$ (AH), & par-là AT (t)$=0$; réduit cette intégrale de l'art. 1. à $0 = HS + q$, d'où résulte $q = -HS$.

III. Donc (*art.* 1. 2.) $AT = H\Pi - HS = S\Pi$ est cette intégrale juste & précise, qui donne encore ici par-tout $AT = S\Pi$, ainsi que dans l'art. 4. de la Solut. 1. De sorte que S sera ici comme là, l'origine des $S\Pi$ qui pris depuis ce point fixe S vers D exprimeront encore les temps écoulés AT (t) à la fin desquels se trouvent encore les vitesses retardées TU (u) restantes des primitives TV malgré les résistances ici supposées.

IV. Donc aussi l'art. 1. donnant u (TU) $= \frac{a}{x}\sqrt{aa-xx}\left(\frac{A\Pi\times\Pi P}{AP}\right)$, si l'on prend partout ici les abscisses $AT = S\Pi$ sur l'axe AC, & les ordonnées perpendiculaires $TU = \left(\frac{A\Pi\times\Pi P}{AP}\right)$, la ligne HUM qui passera par tous les points U ainsi trouvés, sera ici la Courbe cherchée des vitesses retardées restantes des primitives TV malgré les résistances du milieu supposé résistant en raison des quarrés de ces vitesses actuelles ou restantes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

V. Cette construction de la Courbe HUM servira comme dans l'art. 6. de la Solut. 1. à construire celle ARN des résistances totales TR du milieu supposé. *Ce qu'il falloit encore aussi trouver.*

Co-

COROLLAIRE XXXI.

Puisque le cas de $AP = AQ$ en rendant (*Solut.* 2. *art.* 2. & 3.) $AT = 0 = S\Pi$, & conséquemment $TU = AH$, rend aussi u $(TU) = a$ (AF); l'on aura ici $AH = AF$ conformément au Lem. 1. art. 3. pag. 247. de 1709.

COROLLAIRE XXXII.

De ce que (*Solut.* 2. *art.* 1.) $u = \frac{a}{x}\sqrt{aa - xx}$, le cas de $x = a$, ou de $AP = AD$, rend $u = \frac{a}{a}\sqrt{aa - aa} = 0$; l'on aura ici TU $(u) = 0$ à la fin du temps $AM = SD$. Ainsi la Courbe AUM rencontrera son axe à la fin du temps AM, & les vitesses TU restantes des primitives TV, s'y éteindront tout à fait par l'opposition des résistances du milieu supposé, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 1.

COROLLAIRE XXXIII.

Pour trouver encore ici les espaces parcourus pendant les temps AT (t), il est à remarquer que l'art. 1. de la Solut. 2. lequel vient de donner $u = \frac{a}{x}\sqrt{aa - xx}$, & $dt = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, doit donner aussi $udt = \frac{aadx}{x}$, & $\int udt$ $(ATUH)$ $= aa \times lx + q = aa \times lAP + q$. Mais le cas de $ATUH = 0$, rendant aussi AT ou (*Solut.* 2. *art.* 3.) $S\Pi = 0$, & par conséquent $AP = AQ$, ré-

réduit cette intégrale à $0 = aa \times lAQ + q$, d'où résulte $q = -aa \times lAQ$. Donc cette intégrale complette est $ATUH = aa \times lAP - aa \times lAQ = aa \times l\frac{AP}{AQ}$; & conséquemment $AMUH = = aa \times l\frac{AD}{AQ}$. Donc aussi (*Lem.* 2. *pag.* 248. *de* 1709.) les espaces ici parcourus pendant les temps AT ou (*Solut.* 2. *art.* 3.) $S\Pi$, sont entr'eux comme les grandeurs $aa \times l\frac{AP}{AQ}$ correspondantes, où (à cause de a constante) comme les Logarithmes des fractions $\frac{AP}{AQ}$ correspondantes, ou comme les Logarithmes des raisons des correspondantes variables AP à la constante AQ; & à l'espace entier parcouru pendant tout le temps AM ou SD, c'est-à-dire (*Corol.* 1. & 32.) jusqu'à l'entiére extinction des vitesses TU par les résistances supposées, comme ces Logarithmes au Logarithme de la fraction constante $\frac{AD}{AQ}$, ou de la raison de la constante AD à la constante AQ.

COROLLAIRE XXXIV.

Mais la Logarithmique FDH & tout ce qui y a rapport dans la fig. 1. demeurant ici le même que dans le Corol. 10. L'on aura $lAP = lG\Delta = -AG$, & $lAQ = lZX = -AZ$, négatifs à cause que AP, AQ, sont moindres chacune que AD (a) prise ici pour l'unité; par conséquent $lAP - lAQ = -AG + AZ$ =

$=ZG$, ou $l\frac{AP}{AQ}=ZG$. Donc (*Corol.* 33.) les espaces ici parcourus pendant les temps AT ou $S\Pi$, doivent être ici entr'eux comme les abscisses ZG correspondantes dont Z est l'origine; & à l'espace entier parcouru pendant tout le temps AM ou SD, c'est-à-dire (*Corol.* 1. & 32. jusqu'à l'entiere extinction des vitesses par les résistances supposées, comme ces ZG sont à ZA: ainsi qu'on l'a déja trouvé dans le Corol. 10.

Cette seconde Solution pourroit encore fournir tous les autres Corollaires de la premiere; mais en voilà assez.

REMARQUE.

Il est à remarquer, que par les Méthodes de M. *Leibniz* & de M. (*Jean*) *Bernoulli*, pour intégrer les fractions rationnelles, la differentielle $-aa \times \frac{udu}{aa+uu}$ dont l'intégrale dans les Corol. 10. 11. 12. 14. vient de donner en differentes manieres le rapport des espaces ici parcourus malgré les résistances supposées, se réduit à deux differentielles Logarithmiques imaginaires, cependant intégrables ensemble par le moyen d'une Logarithmique réelle ou d'une hyperbole.

Car suivant ces deux Méthodes inserées dans les Mem. de l'Acad. de 1702. & dans les *Actes de Leipsik* de la même année, l'on aura ici $\frac{udu}{aa+uu}=\frac{1}{2}\times\frac{du}{u+a\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\times\frac{du}{u-a\sqrt{-1}}$ differentielles logarithmiques imaginaires. Or si

si l'on prend encore $\frac{a^4}{xx} = aa + uu$, & conséquemment $uu = \frac{a^4}{xx} - aa$, l'on aura $udu = -\frac{a^4 x dx}{x^4} = -\frac{a^4 dx}{x^3}$ par la differentiation en signes contraires qu'exigent les accroissemens alternatifs de x, u, dans $\frac{a^4}{xx} = aa + uu$. Donc $\frac{dx}{x} = \frac{-udu}{aa+uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{u + a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{du}{u - a\sqrt{-1}}$.

Par conséquent ces deux differentielles logarithmiques imaginaires sont intégrables ensemble par le moïen d'une Logarithmique réelle ou d'une hyperbole, ainsi qu'on le vient de dire. Cette Logarithmique est celle qui vient de donner dans les Corol. 33. 34. les espaces ici parcourus : l'hyperbole en est aisée à déduire ; ainsi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Si l'on eût pris $2as = aa + uu$, l'on auroit ou $ads = udu$; & delà tout d'un coup $\frac{1}{2} \frac{ds}{s} = \frac{udu}{aa+uu} = \frac{1}{2} \times \frac{du}{a + a\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} \times \frac{du}{a - a\sqrt{-1}}$, ou $\frac{ds}{s} = \frac{du}{a + a\sqrt{-1}} + \frac{du}{a - a\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire, une Logarithmique réelle pour intégrale des deux differentielles logarithmiques imaginaires précédentes.

S C H O L I E.

I. * Puisque la premiere condition de ce Pro-

* Fig. I.

Problême-ci donne (*Solut.* 1. *art.* 2.) $z = \frac{uu}{a}$, ou $uu = az$, cette égalité n'étant que de raport; l'on aura ici $du = \frac{adz}{2\sqrt{az}}$. Ainsi l'équation $dt = \frac{-aadu}{aa+uu}$ trouvée dans la Solut. 1. art. 2. pour celle de la Courbe *HUM* des vitesses restantes *TU* (u), se changera ici en $dt = \frac{-aadz}{2a\sqrt{az}+2z\sqrt{az}}$ pour la Courbe *KEC* des résistances instantanées z (dr) du milieu supposé résistant en raison des quarrés uu ou $\frac{uu}{a}$ des vitesses actuelles ou restantes (u) malgré les résistances de ce milieu. Et le cas de *AT* (t) $=0$, qui rend *TU* (u) $=$ *AH* (a), réduisant à z (*AK*) $= a$ (*AH*) l'équation z (*TE*) $= \frac{uu}{a}$; il est manifeste que cette Courbe doit passer par *H*; & son équation $dt =$ $= \frac{-aadz}{2a\sqrt{az}+2z\sqrt{az}}$ s'y réduisant à $dt =$ $= \frac{-aadz}{2aa+2aa} = \frac{-dz}{4}$, qu'elle y doit rencontrer *AH* sous un angle dont le sinus soit à celui de son complément :: 1. 4. c'est-à-dire, le quart de celui de son complément.

II. De plus l'équation $z = \frac{uu}{a}$ aïant (*Corol.* 1. & 32.) $u = 0$ en *M*; elle y doit aussi avoir z (*TE*) $= 0$, & par-là y réduire l'équation dt $=$

$= \frac{-aadz}{2a\sqrt{az}+2z\sqrt{az}}$ à $dt = \frac{-dz}{0}$. D'où l'on voit que cette Courbe *KEC* ou *HEC* des résistances instantanées *TE* ou *z* (*dr*) du milieu supposé, doit non-seulement passer par *M* aussi-bien que (*Corol.* 1. & 32.) celle *HUM* des vitesses restantes *TU*(*u*) malgré ces résistances; mais encore y avoir son axe *AC* pour tangente, & tourner sa convexité vers lui de même (*Corol.* 7.) que *HUM*.

III. Pour construire cette Courbe *KEM* ou *HEM* des résistances instantanées, il n'y a qu'à prolonger par-tout *GB* dans la Fig. 2. jusqu'à la rencontre de *TU* en *E*; & alors on aura $TE = DB$ (*Corol.* 15.) $= \frac{uu}{a}$ (*Solut.* 1. *art.* 2. $= z$. *Ce qu'il falloit trouver.*

IV. On peut pareillement construire cette Courbe *KEC* par le moïen de la Courbe* *HUM* déja construite dans les Solut. 1. 2. Car l'équation $z = \frac{uu}{a}$, ou (*Solut.* 1.) $TE = \frac{TU \times TU}{AH}$ fait voir que si l'on fait le demi-cercle $A\Delta H$ sur le diametre *AH*, lequel demi-cercle soit rencontré en Δ par l'arc circulaire $\varepsilon\Delta$ décrit du centre *A*, & du rayon $A\varepsilon$ ou *TU*; que de ce point Δ on fasse ΔE parallele à *AC*, & qui rencontre *TU* en *E*: ce point *E* sera un de ceux de la Courbe cherchée *KEM* ou *HEM*. Car si l'on prolonge ΔE jusqu'en Σ sur le diametre *AH*, & qu'on tire la corde $A\Delta$; l'on aura ici $TE = A\Sigma = \frac{A\Delta \times A\Delta}{AH} = \frac{A\varepsilon \times A\varepsilon}{AH} = \frac{TU \times TU}{AH} = \frac{uu}{a}$ (*hyp.*) $= z$: c'est-à-dire $TE = z$; &

* Fig. 1.

& ainsi de toutes les autres ordonnées de la Courbe *KEC*.

V. Tout ce qu'on vient de remarquer de cette Courbe dans l'art. 2. suit encore de cette construction: savoir,

1°. Que le cas de $AT=0$, qui rend TU ou $A\varepsilon$ ou $A\Delta=AH$, rendant aussi $A\Sigma$ ou TE ou $AK=AH$; cette Courbe *KEC* doit passer par *H*, & y avoir son point *K*.

2°. Que le cas de $AT=AM$, qui (*Corol.* 1. & 32.) rend TU ou $A\varepsilon$ ou $A\Delta=0$, rendant aussi $A\Sigma$ ou $TE=0$; cette même Courbe *KEC* ou *HEC* doit rencontrer son axe *AC* en *M*, & l'avoir pour tangente en ce point, aïant là dz nulle par raport à dt, comme $A\Sigma$ l'est par raport à $A\Delta$ en *A*; au lieu que la Courbe *HUM* rencontre son axe *AC* en *M* (*Corol.* 5.) sous un angle de 45. degrés.

Quant aux raports de la pesanteur du mobile aux résistances instantanées du milieu supposé, &c. la maniere dont on les a trouvés dans la Remarq. 2. pag. 268. &c. de 1709. pour les mouvemens accelerés malgré ces résistances, fait voir assez comment on les pourroit trouver aussi pour les mouvemens retardés dont il s'agit ici, pour n'avoir pas besoin de s'y arrêter. Nous n'en dirons donc pas davantage sur les mouvemens faits dans des milieux résistans en raison des quarrés des vitesses des corps mûs: Hypothese ordinaire, qui quoique plus vrai-semblable que celle des résistances en raison de ces vitesses, dont nous avons aussi parlé dans les Mem. de 1708. pag. 144. 272. 320. 388. 534. &c. l'est cependant encore moins que celle des résistances en raison des sommes faites de ces vitesses & de leurs quarrés. On verra dans d'autres Memoires ce

F 2 qu'il

qu'il arriveroit dans celle-ci à des mouvemens exposés à de telles résistances.



CONSTRUCTION GENERALE
DES QUARRE'S MAGIQUES.

PAR M. SAUVEUR.

* APRE'S que plusieurs personnes d'un merite connu se sont appliquez à la construction des Quarrés magiques, j'ai cru pouvoir donner des reflexions particulieres que j'ai été engagé de faire par des personnes pour qui j'ai du respect; & je donne des principes si simples & si generaux, que je ne croi pas qu'on en ait besoin d'autres pour épuiser cette matiere, qui n'est que de pure curiosité. Pour montrer la fécondité des principes que j'établis, j'ajoûte les Quarrés composez, les Enceintes, les Croix, les Chassis & les Cubes magiques.

I. *Définitions generales.*

1. Nous appellons ici *Quarré* un quarré divisé en cellules quarrées pour renfermer dans chacune un nombre.

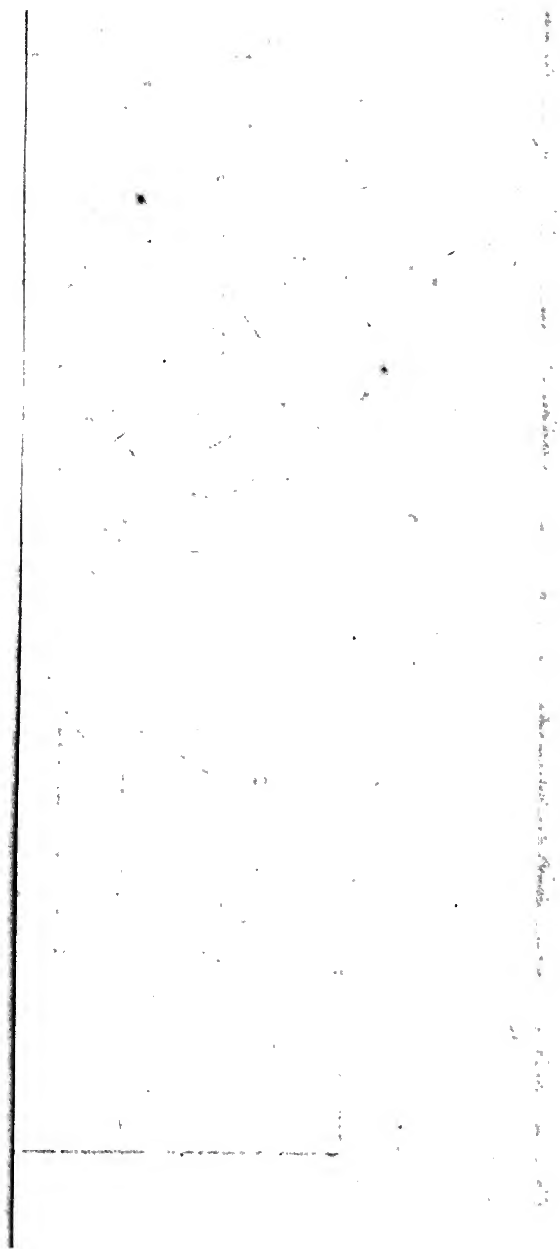
Dans un Quarré il faut considerer les Bandes, les Cellules & les Quartiers.

2. *Les Bandes horizontales* sont formées par les cellules ‡ 1. 2. 3. 4. 5. ou 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Les

* 20. Decem. 1709. & 3. Dec. 1710.

‡ *Voyez le 1. Quarré de l'art.* 4.



Les Bandes verticales par 1. 6. 11. 16. 21. ou 2. 7. 12. 17. 22. &c.

La premiere Diagonale est 1. 7. 13. 19. 25. & la seconde Diagonale est 5. 9. 13. 17. 21.

Les Bandes paralleles à la 1re Diagonale sont 2. 8. 14. 20. 21. & 3. 9. 15. 16. 22. & 4. 10. 11. 17. 23. & 5. 6. 12. 18. 24.

Les Bandes paralleles à la 2de Diagonale sont 4. 8. 12. 16. 25. & 3. 7. 11. 20. 24. &c.

Les Bandes correspondantes sont les bandes également distantes des extremités, comme 1. 5. & 21. 25. de même 2. 22. & 4. 24.

Les Bandes non correspondantes sont deux bandes qui ne sont pas également distantes des extremités, comme 1. 21. & 4. 24.

Dans les Quarrés impairs il y a deux *Bandes moyennes*; savoir, l'horizontale 11. 15. & la verticale 3. 23. & *le Centre* 13. est commun aux deux bandes moyennes, & aux deux diagonales.

Dans chaque Bande il y a des *Cellules correspondantes*, & des *Cellules non correspondantes*, & dans les Bandes des impairs il y a une *Cellule moyenne*.

Chaque Quarré est partagé en 4. *Quartiers*; savoir, dans les pairs par 2 lignes qui passent par le centre, & dans les impairs par les deux bandes moyennes.

3. *La Racine d'un quarré* est le nombre des cellules de chaque bande, & l'on désignera les quarrés par leurs racines; ainsi le quarré de 9. est celui qui a 9. cellules dans une bande, & 81. dans sa superficie : c'est-pourquoi si l'on appelle *r* la racine d'un quarré, *rr* marquera le nombre des cellules de ce quarré.

Une Racine est *paire* comme 4. 6. 8. 10. 12.

12. &c. ou impaire comme 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c.

Une Racine paire eſt *pairement paire* comme 4. 8. 12. 16. 20. 24. &c. lorſque ſa moitié eſt paire, & elle eſt *impairement paire* comme 6. 10. 14. 18. 22. 26. &c. lorſque ſa moitié eſt impaire.

Une Racine impaire eſt *pairement impaire* comme 5. 9. 13. 17. 21. 25. &c. lorſque ôtant 1. la moitié du reſte eſt paire, & elle eſt *impairement impaire* lorſque cette moitié eſt impaire comme 3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. &c.

4. Un *Quarré naturel* eſt celui qui renferme des nombres qui augmentent par ordre dans chaque bande.

	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15
15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25

	1	3	4	7	8
0	1	3	4	7	8
8	9	11	12	15	16
17	18	20	21	24	25
29	30	32	33	36	37
38	39	41	42	45	46

Ces nombres ſont ordinairement en *progreſſion ſimple* arithmetique, ou bien en *proportion interrompuë*.

5. Ces nombres ſeront conſiderés comme compoſés de deux nombres; ſavoir, de petits nombres que j'appelle 2ds *Nombres*, qui ſont

	1	3	4	7	8
0	0.1	0.3	0.4	0.7	0.8
8	8.1	8.3	8.4	8.7	8.8
17	17.1	17.3	17.4	17.7	17.8
29	29.1	29.3	29.4	29.7	29.8
38	38.1	38.3	38.4	38.7	38.8

les mêmes dans chaque verticale, & de grands nom-

nombres que j'appelle 1ers *Nombres*, qui sont les mêmes dans chaque horizontale; de sorte qu'il suffit de marquer les nombres d'un Quarré naturel une fois par les 1ers & 2ds nombres.

6. Pour rendre la construction des Quarrés plus generale nous marquerons les 2ds nombres par les lettres *p. q. r. s. t. u.* &c. que nous appellerons 2des *lettres*, & les 1ers nombres par les lettres *A. B. C. D. E.* &c. que nous appellerons 1res *lettres*.

	p	*q*	*r*	*s*	*t*
A	*Ap*	*Aq*	*Ar*	*As*	*At*
B	*Bp*	*Bq*	*Br*	*Bs*	*Bt*
C	*Cp*	*Cq*	*Cr*	*Cs*	*Ct*
D	*Dp*	*Dq*	*Dr*	*Ds*	*Dt*
E	*Ep*	*Eq*	*Er*	*Es*	*Et*

7. Nous exprimerons aussi les 2ds nombres par la *moyenne n*, avec les differences qui seront negatives & positives; & pour avoir la valeur de *n* dans les Quarrés impairs, prenez la somme des 2ds nombres 1. 2. 3. 4. 5. qui est 15. & la divisez par $r = 5$. vous aurez $3 = n$. & ces nombres seront $n - 2.\ n - 1.\ n \pm 0.\ n + 1.\ n + 2.$ que nous exprimerons seulement par les seules differences $-2. -1. 0. 1. 2.$ car la quantité de la moyenne *n* est indifferente, pourvû qu'elle surpasse celle

	-1	-1	0	1	2
-2λ	-2λ -2	-2λ -1	-2λ 0	-2λ 1	-2λ 2
-1λ	-1λ -2	-1λ -1	-1λ 0	-1λ 1	-1λ 2
0	0 -2	0 -1	0 0	0 1	0 2
1λ	1λ -2	1λ -1	1λ 0	1λ 1	1λ 2
2λ	2λ -2	2λ -1	2λ 0	2λ 1	2λ 2

le de la plus grande negative au moins de 1.

Si le Quarré eſt pair comme de 6. au lieu des 2ds nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. il faut prendre leur double 2. 4. 6. 8. 10. 12. Alors n=7. & les differences ſont les impairs—5.—3.—1. 1. 3. 5. la quantité de n doit être impaire & plus grande que le plus grand negatif —5. afin qu'on puiſſe diviſer les nombres qui en viendront, que j'appellerai *faux Nombres*, par 2, & réduire ainſi les nombres du Quarré aux plus ſimples que je regarderai comme les vrais nombres.

8. Les 1ers nombres s'exprimeront par la moyenne m, avec de ſemblables differences multipliées par λ. ainſi dans le quarré de 5. les differences ſeront —2λ.—1λ. 0. 1λ. 2λ. & dans le quarré de 6. elles ſeront —5λ—3λ.—1λ. 1λ. 3λ. 5λ.

La quantité de λ doit être au moins égale au plus grand des 2ds nombres, & dans les quarrés pairs il en doit être au moins la moitié. Il peut être plus petit, pourvû qu'aucune des differences réciproques des 1ers nombres ne ſoit pas égale à aucune de celle des 2ds nombres.

La quantité de la moyenne m doit être poſitive & au moins égale au plus grand nombre négatif.

Aux premieres differences des 1rs nombres l'on peut ajoûter *des ſecondes differences*, avec ces conditions, 1°. Qu'elles peuvent être égales ou inégales. 2°. Que leur ſomme doit être égale à zero. 3°. Qu'il faut les ajoûter par ordre aux 1res differences, c'eſt-à-dire, les plus grandes 2des differences aux plus grandes.

des premieres, les plus petites aux plus petites; ainsi au quarré de 6. les 1res & 2des differences peuvent être—5λ—4.—3λ—1.—1λ—1. 0—1. 1λ—+0. 3λ—+3. 5λ—+4.

9. *Un Quarré magique* est une disposition des nombres d'un quarré naturel, telle que la somme des nombres qui sont dans chaque bande horizontale, dans chaque verticale & dans chaque diagonale soit toûjours la même, comme dans ce quarré-ci où ces sommes sont 65.

11	2	9	20	23
22	14	5	8	16
19	25	13	1	7
10	18	21	12	4
3	6	17	24	15

10. Les nombres du Quarré magique sont formés par les sommes des 1ers & des 2ds nombres de l'article 5. Il peut neanmoins y avoir une suite de nombres qui ne peuvent point être compris dans ceux de cet article, & qui forment un Quarré magique; mais ils peuvent s'y rapporter en ajoutant ou ôtant un même nombre de quelqu'un de ceux qui sont dans chaque bande, comme ici ajoûtant 1. aux nombres qui ont un point. *V. art.* 83.

2.	45	42	12
24	30	32.	15
36	18	21	26.
39	8.	6	48

11. *Un Quarré naturel Geometrique* est une suite de nombre en progression Geometrique simple, ou en proportion Geometrique interrompuë, qui augmente d'ordre dans chaque rang.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

L'on doit considerer les nombres de ce Quarré comme les produits des 1er nombres 1. 8. 64. par les 2ds nombres 1. 2. 4. ou generalement comme les

 pro-

produits des 1res lettres *ABC* par les 2des lettres *pqr*, à la difference des quarrés ordinaires qui sont quarrés arithmetiques, dans lesquels il faut prendre la somme des 1res & des 2des lettres.

	1	2	4
1	1.1	1.2	1.4
8	8.1	8.2	8.4
64	64.1	64.2	64.4

	p	*q*	*r*
A	*Ap*	*Aq*	*Ar*
B	*Bp*	*Bq*	*Br*
C	*Cp*	*Cq*	*Cr*

Un Quarré magique Geometrique est un quarré rempli de nombres tels que le produit de ceux qui sont dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale, est toûjours le même comme ici où le produit est $4096 = B^3 q^3$.

8	4	128
256	16	1
2	64	32

	p 1	*q* 2	*r* 4
A 1	*Bp*	*Ar*	*Cq*
B 8	*Cr*	*Bq*	*Ap*
C 64	*Aq*	*Cp*	*Br*

Ce Quarré magique Geometrique peut être construit précisément comme le Quarré ordinaire, avec ces differences, 1°. Qu'au lieu de prendre des nombres en progression ou proportion arithmetique, il les faut prendre en progression ou proportion Geometrique. 2°. Qu'au lieu d'additionner ou de soustraire, il faut multiplier ou diviser; c'est-pourquoi nous ne parlerons plus des Quarrés magiques Geometriques.

Nous

Nous expliquerons dans la suite les Quarrés composés, les Enceintes, les Croix, les Chassis & les Cubes magiques.

II. *Construction des Quarrés magiques impairs par lettres generales.*

12. J'appelle *lettres generales* les 1res lettres *A.B.C.D.E.* &c. & les secondes *p.q.r.s.t.* &c. à la difference des lettres analogues dont nous parlerons dans la Section IV.

Les Quarrés impairs se construisent avec les lettres generales. 1. par diagonales. 2. par indices. 3. par la methode mixte. 4. par la methode desordonnée.

Ces constructions donneront des Quarrés magiques, parceque les lettres seront toutes dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale; & si quelques-unes sont repetées dans les diagonales, il faut que les repetées soient égales à celles dont elles occupent la place.

13. Pour construire un Quarré magique impair *par diagonales*, 1°. Dans la 1re bande horizontale mettez par ordre les 1res lettres & les 2des lettres. 2°. Mettez *A* dans les cellules de la 1re diagonale, & les autres 1res lettres dans les cellules des bandes paralleles à la 1re diagonale. 3°. Mettez la dernière 2de lettre *t* dans la 2de diagonale, & les autres 2des lettres dans les cellules des bandes paralleles à la 2de diagonale, & l'on aura le Quarré qui sera ma-

A p	B q	C r	D s	E t
E q	A r	B s	C t	D p
D r	E s	A t	B p	C q
C s	D t	E p	A q	B r
B t	C p	D q	E r	A s

 gique,

gique, pourvû que les lettres repetées dans les diagonales soient moyennes entre les autres de leur espece.

14. Pour construire un Quarré magique impair *par indices*, 1°. Dans la 1re horizontale mettez par ordre les 1res & 2des lettres. 2°. Au-dessus de la 1re bande horizontale écrivez 0. 1. 2. 3. &c. que j'appelle *les indices* des 1res & 2des lettres qui sont dans la 1re bande horizontale; de sorte que 3 est indice de *D* & de *s*. 3°. Mettez devant la 2de cellule de la 1re verticale deux indices 2. 3. qui ne soient pas 0. 1. $r-1=4$, ni aliquotes ou aliquantes de la racine 5 du Quarré proposé *. 4°. Prenez les multiples de 2. qui sont 2. 4. 6. 8. ou 2. 4. 1. 3. en ôtant la racine 5. & les écrivez dans la 1re colomne. 5°. Prenez les multiples de 3. qui sont 3. 6. 9. 12. ou 3. 1. 4. 2. en ôtant aussi 5. vous aurez la 2de colomne. 6°. Dans la 1re verticale écrivez les 1res lettres dont les indices sont dans la 1re colomne, & les 2des lettres dont les indices sont dans la 2de colomne.

	0	1	2	3	4
0. 0	Ap	Bq	Cr	Ds	Et
2. 3	Cs	*Dt*	*Ep*	*Aq*	*Br*
4. 1	Eq	*Ar*	*Bs*	*Ct*	*Dp*
1. 4	Bt	*Cp*	*Dq*	*Er*	*As*
3. 2	Dr	*Es*	*At*	*Bp*	*Cq*

Au lieu de remplir d'abord la 1re horizontale, l'on pouvoit remplir une autre horizontale, & mettre les indices 0. 0. devant cette bande; & con-

1. 4	Bt	*Cp*	*Dq*	*Er*	*As*
3. 2	Dr	*Es*	*At*	*Bp*	*Cq*
0. 0	Ap	Bq	Cr	Ds	Et
2. 3	Cs	*Dt*	*Ep*	*Aq*	*Br*
4. 1	Eq	*Ar*	*Bs*	*Ct*	*Dp*

* *V. art.* 15.

8	9	10	11	12	13	14
z	*Ka*	*Lb*	*Mc*	*Nd*	*Oe*	*Pf*
d	*Me*	*Nf*	*Op*	*Pq*	*Ar*	*Bs*
q	*Or*	*Ps*	*At*	*Bu*	*Cx*	*Dy*
u	*Ax*	*By*	*Cz*	*Da*	*Eb*	*Fc*
a	*Cb*	*Dc*	*Ed*	*Fe*	*Gf*	*Hp*
e	*Ef*	*Fp*	*Gq*	*Hr*	*Is*	*Kt*
r	*Gs*	*Ht*	*Iu*	*Kx*	*Ly*	*Mz*
x	*Iy*	*Kz*	*La*	*Mb*	*Nc*	*Od*
b	*Lc*	*Md*	*Ne*	*Of*	*Pp*	*Aq*
f	*Np*	*Oq*	*Pr*	*As*	*Bt*	*Cu*
s	*Pt*	*Au*	*Bx*	*Cy*	*Dz*	*Ea*
y	*Bz*	*Ca*	*Db*	*Ec*	*Fd*	*Ge*
c	*Dd*	*Ee*	*Ff*	*Gp*	*Hq*	*Ir*
p	*Fq*	*Gr*	*Hs*	*It*	*Ku*	*Lx*
t	*Hu*	*Ix*	*Ky*	*Lz*	*Ma*	*Nb*

(*A*)	*B*	*M*	(*N*)	*O*	*P*
-7λ	-6λ	4λ	5λ	6λ	2λ
-105	-90	60.	75.	90.	30.
0.	15.	65.	180.	195.	135.
7	17	77	193	209	145
35	51	02	137	3	21
69	90	5	23	31	53
103	119	39	60	71	87
122	213	73	89	100	112
156	166	92	108	124	215
195	206	126	211	158	171
149	10	165	176	192	208
20	34	194	205	142	2
46	68	138	4	22	36
86	102	18	38	54	75
115	127	56	72	88	104
214	155	85	97	107	123
133	185	109	125	216	151
207	148	218	159	180	191
(*p*)	*q*	[*c*]	*d*	*e*	[*f*]
-1	-6	4	5	6	2
7	2	12	13	14	10

continuer comme ci-dessus. 7°. Dans les cellules de chaque horizontale écrivez d'ordre les 1res & les 2des lettres, vous aurez un Quarré magique impair par indices, pourvû que s'il y a quelques lettres repetées dans les diagonales, les repetées soient égales à celles dont elles occupent la place.

15. En appellant *n* l'indice de la 1re ou de la 2de lettre qui est devant la 2de cellule de la 1re verticale, après o. o, il arrivera plusieurs proprietez.

1. *n* marquera la difference des indices & des lettres de chaque verticale, $n+1$ la difference des indices des lettres de la 1re diagonale, $n-1$ celle de la 2de diagonale.

2°. On ne peut point faire de Quarré magique si *n* est aliquote ou aliquante de *r*, ou si $n-1$ l'est de $n+1$, ou si la difference des deux indices qui sont après o. o. l'est de *r*; c'est-pourquoi on ne peut point faire de Quarré magique pair par indices.

3°. * Si $n+1=0$, c'est-à-dire, si $n=r-1$, *A* ou *p* se trouvera seule dans la 1re diagonale; & si $n-1=0$ ou $n=1$, la derniere lettre se trouvera seule dans la 2de diagonale, & le quarré se trouvera construit par diagonales ou par la methode mixte art. 13. ou 16.

4°. † Si $n+1$ est aliquote ou aliquante de *r*, il y aura plusieurs lettres repetées dans la 1re diagonale, comme ici *ADGKN*; & *pub*; & si $n-1$ est aliquote ou aliquante de *r*, il y aura plusieurs lettres repetées dans la 2de diagonale, comme *fruzc*.

16. Pour

* *Voyez le 1 Quarré de l'art. 14.*
† *Voyez le Quarré suivant.*

16. Pour construire un Quarré magique impair par *la methode mixte*. 1. Dans la 1re horizontale mettez par ordre les 1res & les 2des lettres. 2. Mettez les 1res lettres par diagonale (*art.* 13.) 3. Mettez les 2des lettres par indices (*art.* 14.) Vous aurez un Quarré magique impair par la methode mixte.

	0	1	2	3	4
0	Ap	Bq	Cr	Ds	Et
3	*Es*	At	*Bp.*	*Cq*	*Dr*
1	*Dq*	*Er*	As	*Bt.*	*Cp*
4	Ct	*Dp*	*Eq*	Ar	*Bs.*
2	*Br*	*Cs.*	*Dt*	*Ep*	*Aq*

Ou bien mettez les 1rs lettres par indices, & les 2des lettres par diagonales.

17. Pour construire un Quarré magique par *la methode desordonnée*, mettez (*comme dans l'art.* 14) les indices sur la 1re horizontale, & mettez-les devant la 1re verticale dans tel ordre qu'il vous plaira; ensorte que deux mêmes indices ne se rencontrent pas ensemble, achevez comme dans l'art. 14.

		0	1	2	3	4
0.	0	Ap	Bq	Cr	Ds	Et
1.	3	Bs	*Ct*	*Dp*	*Eq*	*Ar.*
4.	2	Er	*As*	*Bt*	*Cp*	*Dq*
2.	4	Ct	*Dp*	*Eq*	*Ar*	*Bs*
3.	1	Dq	*Er*	*As*	*Bt*	*Cp*

III. *Construction en nombres des Quarrés magiques impairs faits avec les lettres generales.*

18. S'il n'y a aucune lettre repetée dans la diagonale comme au Quarré 5. de l'art. 14. 1°. Prenez pour valeur des 2des lettres *p.q.r.s.t.* des

des nombres tels que 1. 2. 3. 4 5. rangez en tel ordre qu'il vous plaira sous ces lettres. 2°. Prenez de même à volonté les nombres 0. 5. 10. 15. 20. pour les 1res lettres *ABCDE*, ensorte neanmoins que leur plus petite difference soit au moins égale au plus grand 2d nombre 5. * 3°. Dans la premiere cellule mettez $4 = 0 + 4 = A + p$, qui sont dans la 1re cellule du Quarré de l'art. 14. 4°. Dans la 2de cellule mettez $16 = 15 + 1 = B + q$. & ainsi de suite, vous aurez un Quarré magique en nombre formé sur le 1er Quarré magique en lettres de l'art. 14.

A	*B*	*C*	*D*	*E*
0.	15.	10.	20.	5.
4	16	13	25	7
12	22	9	1	8
6	3	20	12	24
17	14	21	8	5
23	20	2	19	11
p	*q*	*r*	*s*	*t*
4	1	3	5	2

19. Si une 2de lettre est repetée seule dans la diagonale comme [*t*] dans le Quarré de l'art. 13. 1°. Prenez à volonté les differences −3. −2. 0. 1. 4. dans lesquelles soit 0, & dont la somme soit égale à zero. 2°. Ajoûtez à ces differences un nombre positif plus grand que la plus grande difference negative −3. par exemple 4. vous aurez 1. 2. 4. 5. 8. pour valeur des 2des lettres *p. q. r. s.* [*t*] en faisant $t = 4$.

Si aucune des 1res lettres est repetée dans la diagonale, vous trouverez la valeur de *ABCDE* comme dans l'art. 18.

Mais si une 1re lettre est seule repetée dans la diagonale comme (*A*) dans le Quarré de l'art. 13. ou de l'art. 16. 1°. Prenez à volonté

* *V. art. 8.*

té les differences —3λ. —2λ. —1λ. 0λ. 6λ. Ajoûtez, si vous voulez, les secondes differences —2. —1. 0. 0. 3. vous aurez —3λ—2. —2λ—1. —1λ+0. 0λ+0. 6λ+3. dans lesquelles il faut qu'il y ait une difference égale à zero. 2°. Faites λ au moins égal au plus grand 2d nombre 8. vous aurez les differences en nombres —26. —17. —8. 0. 51. 3°. Enfin à ces differences ajoûtez 26. qui est au moins égal à la plus grande difference negative, vous aurez 0. 9. 18. 26. 77. pour valeur de (*A*) *B C D E* en faisant *A* égal à 26.

(*A*)	*B*	*C*	*D*	*E*
26.	77.	9.	0.	18.
28	82	10	8	22
23	27	85	13	2
1	26	30	79	14
17	4	20	31	78
81	11	5	19	34
p	*q*	*r*	*s*	[*t*]
2	5	1	8	4

20. * Si plusieurs 2des lettres sont repetées plusieurs fois dans la 1re diagonale que nous distinguerons par (), & dans la 2de diagonale que nous distinguerons par [], comme dans le quarré de 15. de l'art. 15. dont les 2des lettres sont (*p*) *q*. [*r*] *s*. *t*. [(*u*)] *x*. *y*. [*z*] *a*. (*b*) [*c*] *d*. *e*. [*f*] entre lesquelles *u* est commune aux deux diagonales. 1°. Donnez une difference —2 à volonté à la lettre [(*u*)]. 2°. Donnez aux lettres (*p*) [(*u*)] (*b*) les differences à volontez —1. —2. 3. dont la somme soit égale à zero : donnez de même aux lettres [*r*] [(*u*)] [*z*] [*c*] [*f*] les differences —5. —2. 1. 4. 2. 3°. Donnez aussi aux autres lettres les differences —6. —4. —3. —7. 0. 7. 5, 6 ensorte que la somme de toutes les lettres soit aussi égale à zero. 4°. Ajoûtez à ces nombres le positif

8.

* *Voyez les Quarrés, pp. 100. 101.*

8. qui soit plus grand que le negatif —7. vous aurez 7. 2. 3. 4. 5. &c. pour 2ds nombres.

Si les 1res lettres ne sont point repetées, faites comme dans l'art. 18. & si plusieurs sont repetées comme (*A*) (*D*) (*G*) (*K*) (*N*) dans le quarré de 15. 1°. Donnez à ces lettres les differences à volonté —7λ. —4λ. —1λ. 7λ. 5λ. dont la somme soit égale à zero. 2°. Donnez aussi aux autres lettres des differences dont la somme soit aussi égale à zero. 3°. Faites λ égal au plus grand 2d nombre 15. vous aurez —105. —90. —75. —60. &c. Enfin en ajoûtant le positif 105. égal au plus grand negatif —105. vous aurez les 1rs nombres 0. 15. 30. 45. 60. &c. & faites ensuite le quarré en nombres comme dans l'art. 18.

21. Si le Quarré magique est construit par la methode desordonnée (*art.* 17.) vous trouverez à peu près de même les differences des 2des lettres *p*, 0: *q*, 1: *r*, 2: *s*, —2: *t*, —1. & des 1res lettres *A*, —1λ. *B*, 0λ. *C*. 1λ: *D*, —2λ: *E*, 2λ.

22. * Remarquez que si selon l'article 14. l'on commence par remplir l'horizontale moyenne, & que l'on donne les mêmes differences aux lettres également distantes du centre, le Quarré magique en nombres aura pour proprieté que la somme des nombres qui sont dans deux cellules également distantes du centre, & qui sont rangez dans une ligne qui passe par le centre, est toûjours double du nombre qui est au centre.

23 De plus dans tout Quarré magique l'on pourra toûjours échanger une bande contre une autre parallele, si la somme des nombres qui

* *V. le 2d Quarré art.* 14.

qui sont dans les 2. cellules de la 1re diagonale est égale à la somme des deux nombres qui doivent s'y placer, & si la même chose arrive dans la 2de diagonale ; d'où il arrive que dans certains cas plusieurs bandes peuvent être échangées, ce que l'on appercevra plus aisément, si au lieu des nombres le Quarré magique est formé avec les differences.

IV. *Définitions des Quarrés magiques par lettres analogues.*

La seconde maniere generale de construire des Quarrés magiques, & par les lettres analogues qui conviennent également à la construction des Quarrés pairs & des Quarrés impairs.

24. Deux lettres sont *analogues* lorsqu'étant semblables l'une est minuscule & l'autre majuscule, comme a A & p P, ensorte que leurs valeurs en nombres ayent la même difference l'une negative & l'autre positive : par exemple $a = m - 2\lambda$, $A = m + 2\lambda$, de même $p = n - 1$, $P = n + 1$. de sorte que la somme de deux 1res lettres analogues est toûjours égale à $2m$, & la somme de deux 2des lettres analogues est toûjours égale à $2n$, & par conséquent la somme de deux 1res lettres analogues est toûjours égale à la somme de deux autres 1res lettres analogues ; ainsi $a + A = b + B = 2m$, de même deux 2des lettres analogues sont égales à deux autres 2des lettres analogues ; ainsi $p + P = r + R = 2n$.

25. Les *Quarrés impairs* outre les analogues, ont les moyennes M, n, dont les differences sont o.

Les

Les differences des lettres sont ou des nombres ordonnez en progression continuë comme 1. 2. 3. 4. 5. &c. ou ils sont des nombres desordonnez 1. 2. 5. 7. 11. &c.

Les *Quarrés pairement impairs* ont les minuscules & par conséquent les majuscules en nombre pair, comme dans le quarré de 9. *Voyez l'art.* 3. 7. & 8.

1res lettres	*a*	*b*	*c*	*d*	*M*	*D*	*C*	*B*	*A*
moyennes	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
& differences	-4λ	-3λ	-2λ	-1λ	0	1λ	2λ	3λ	4λ
diff. en nombres	-36	-27	-18	-9	0	9	18	27	36
1ers nombres	0	9	18	27	36	45	54	63	72

2des lettres	*p*	*q*	*r*	*ſ*	*n*	*S*	*R*	*Q*	*P*
moyennes	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
& differences	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4
2ds nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pour avoir les 2ds nombres, faites $n-4=1$: donc $n=5$, $P=9$, &c.

Pour avoir les 1ers nombres, faites $\lambda=P$: vous aurez les differences en nombres —36. 27 &c. ensuite faites $m-36=0$, donc M ou $m=36$ & $a=0$ &c.

Les *Quarrés impairement impairs* ont les minuscules en nombre impair comme dans le quarré de 7.

1res lettres	*a*	*b*	*c*	*M*	*C*	*B*	*A*
moyennes	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
differences	-5λ	-2λ	-1λ	0	1λ	2λ	5λ
& 2des differences	-2	-1	-1	0	1	1	2
differences totales	-47	-19	-10	0	10	19	47
1ers nombres.	0	28	37	47	57	66	94

2des

2des lettres	*p*	*q*	*r*	*n*	*R*	*Q*	*P*
{ moyennes	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
{ & differences	−4	−3	−1	0	1	3	4
2ds nombres	1	2	4	5	6	8	9

26. Les *Quarrés pairs* n'ont point les lettres moyennes *M* & *n*, & les differences sont des nombres impairs ou ordonnaz, comme 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. ou desordonnez comme 1. 5. 11. 13. 21. 45. &c.

Les *Quarrés pairement pairs* ont les minuscules en nombre pair. *Voyez l'art.* 3.

1res lettres	*a*	*b*	*c*	*d*	*D*	*C*	*B*	*A*
{ moyennes	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
{ & differences	−7λ	−5λ	−3λ	−1λ	1λ	3λ	5λ	7λ
diff. en nombres	−28	−20	−12	−4	4	12	20	28
1rs nombres	0	8	16	24	32	40	48	56

2des lettres	*p*	*q*	*r*	*ſ*	*S*	*R*	*Q*	*P*
{ moyennes	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
{ & differences	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7
faux nombres	2	4	6	8	10	12	14	16
2ds nombres	1	2	3	4	5	6	7	8

Pour avoir les faux nombres *, faites $n-7 = 2$: donc $n=9$. Ensuite vous aurez les faux nombres dont les moitiez forment les 2ds nombres 1. 2. 3. &c.

Ponr avoir les 1rs nombres, faites $\lambda = \frac{1}{2} P = 4$, vous aurez les differences en nombres: enfin faites $m-7\lambda$ ou $m-28=0$. Vous aurez $m=28$, d'où vous tirerez la valeur des 1rs nombres, 0. 8. 16. 24. &c.

Les

* *V. art.* 7.

Les *quarrés impairement pairs* ont les lettres minuſcules en nombre impair comme dans le quarré de 6. *abcCBA: pqrRQP*.

27. Un quarré magique eſt *par analogie* lorſque dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale chaque lettre a ſon analogue, ou chaque difference poſitive a ſon égale négative: dans les Quarrés impairs chaque bande horizontale & verticale doit avoir une fois les moyennes *M* & *n*, & chaque diagonale les doit avoir une fois ou en nombre impair.

28. Un quarré magique par analogie eſt par bandes continuës ou *conjuguées* lorſque la même lettre minuſcule & majuſcule, ou la même difference négative & poſitive remplit ſeule deux bandes que j'appelle conjuguées.

Dans les quarrés impairs * les cellules des bandes moyennes ſervent de cellules conjuguées aux lettres qui ont leur place occupée par une lettre moyenne, & elles ſervent de cellules directes pour les lettres qui rempliſſent la bande où elles ſe trouvent.

On trouve horizontalement les bandes moyennes conjuguées des 1res lettres, & verticalement celles des 2es lettres.

Un Quarré eſt *par bandes interrompuës* lorſque la même lettre ou la même difference eſt en plus de deux bandes.

29. Un Quarré magique par bandes conjuguées eſt *par bandes correſpondantes* §, lorſque les bandes conjuguées ſont également diſtantes du milieu ou des extremitez. Ce Quarré eſt *par bandes non correſpondantes*, lorſque les

 ban-

* *Voyez les Quarrés ſuivans.*
§ *art. 1.*

bandes conjuguées n'en ſont pas également diſtantes; enfin ce Quarré eſt *par bandes mixtes*, lorſque les unes ſont correſpondantes & les autres ne le ſont pas.

Dans chaque bande il y aura auſſi des *cellules correſpondantes* & *non correſpondantes*.

30. Dans les cellules de deux bandes conjuguées d'une lettre, j'appelle *lettres conjuguées* les deux lettres qui ſont l'une dans la cellule d'une bande, & l'autre dans la cellule de l'autre bande conjuguée qui eſt vis à vis la premiere & qui ont même 1re & 2e lettre. Ainſi deux 1res lettres conjuguées ſont poſées verticalement, & deux 2es lettres conjuguées ſont horizontales.

J'appelle *lettres directes*, les deux lettres qui ſont dans deux cellules de l'une des bandes conjuguées d'une lettre & qui ſont accompagnées d'une même lettre. Ainſi deux 1res lettres directes ſont horiſontales, & deux 2es lettres directes ſont verticales.

J'appelle enfin lettres oppoſées, celles qui n'étant point directes ni conjuguées ſont accompagnées d'une même lettre : elles ſont ordinairement aux angles oppoſées d'un quadrangle.

31. Un Quarré eſt *par reciproquation*, lorſque dans une bande horiſontale, verticale ou diagonale il y a des lettres ſans analogues, en la place deſquelles il y en a d'autres que j'appelle *reciproques*, dont la ſomme eſt égale à la ſomme des analogues dont elles occupent la place, ou plus ſimplement lorſque la ſomme des differences des lettres qui ſont ſans analogues ſont égales à zero.

32. Un Quarré eſt par *excedans & défaillans*,

lans, lorſque dans une bande la ſomme des 1res lettres étant plus grande que *rm* *, en même temps la ſomme des 2es lettres eſt plus petite que *rn* de la même quantité; enſorte que la ſomme de tous les nombres de cette bande, ſoit toûjours égale à *rm*+*rn*, ou bien reciproquement lorſque la ſomme des 1res lettres eſt plus petite & celle des 2es lettres eſt plus grande de la même quantité.

33. Un Quarré magique eſt avec *des lettres étrangeres*, lorſqu'ayant d'abord pris autant de 1res & de 2es lettres qu'il en faut pour conſtruire ce Quarré & que j'appelle *naturelles*, l'on en ajoûte d'autres que l'on met en la place de quelques-unes des lettres naturelles, comme ſi pour faire un Quarré de 8 au lieu des ſeules lettres *a b c d D C B A* on y ajoûte *e E*, ces deux lettres ſeront regardées comme étrangeres.

34. *Un Quadrangle* ſont quatre cellules qui n'ont qu'une même 1re lettre & une même 2e lettre avec leurs analogues combinez de toutes les manieres differentes comme *ap*, *aP*, *Ap*, *AP*.

Dans un Quadrangle formé par quatre bandes conjuguées, il y a des lettres conjuguées, des lettres directes, & des lettres oppoſées par les angles. *Voyez l'art*. 30.

35. Dans les Quarrés par bandes conjuguées nous nous ſervirons d'indices qui ſeront les nombres ordonnez 1. 2. 3. 4. 5. &c. negatifs & poſitifs : & dans les impairs on ajoûtera 0. *Voyez les quarrez de l'art*. 47.

* *V. les art.* 2. 7. 8.

V. *Maximes pour la construction des Quarrés magiques par bandes conjuguées.*

36. Pour prouver qu'un Quarré par bandes conjuguées est magique, il faut démontrer que dans chaque bande horizontale, verticale & diagonale, chaque lettre a son analogue, & que dans les impairs les moyennes *M* & *n* sont une fois dans les bandes horizontales & verticales, & en nombre impair dans les diagonales; de plus qu'aucune quantité n'est point repetée deux fois, c'est-à-dire, que dans deux cellules deux homologues ne sont point accompagnez de deux autres homologues.

37. Pour changer un Quarré magique par bandes conjuguées en nombres, il faut attribuer aux lettres des valeurs en nombres selon les art. 25. & 26. rangeant ces valeurs en nombres sous les lettres dans tel ordre qu'on voudra, pourvû que la somme des deux analogues soit toûjours égale à *2m* ou à *2n*; ensuite l'on changera les lettres du Quarré magique en nombres comme dans l'article 18.

Mais pour construire un Quarré magique en lettres par bandes conjuguées, il faut avoir present les maximes suivantes, qu'il faut observer aussi-tôt que les occasions se presentent.

38. * Aussi-tôt qu'on met une lettre dans une cellule, il faut mettre son analogue conjuguée dans la cellule conjuguée.

Dans les impairs si la place d'une lettre conjuguée est occupée par une lettre moyenne, il faut mettre cette conjuguée dans la cellule moyenne conjuguée.

39. Dans

* *V. art.* 28. & 30.

39. Dans une diagonale aussi-tôt qu'on a mis une lettre, il faut mettre dans la même diagonale son analogue qui doit être dans l'autre bande conjuguée de cette lettre; ce qui produit deux homologues dans chaque bande conjuguée par l'art. 38.

Dans les impairs si la place de cette analogue est occupée par une moyenne, il la faut placer au centre.

40. Dans les impairs aussi-tôt qu'on a mis une lettre dans une bande moyenne, il faut mettre son analogue dans la même bande vis à vis la moyenne de la bande conjuguée de cette lettre, & ensuite il faut mettre la conjuguée analogue de cette derniere lettre par l'article 38.

41. Aussi-tôt qu'une bande a la moitié de ses cellules remplies d'une minuscule, il faut remplir les autres cellules de sa majuscule, & réciproquement.

42. Dans un quadrangle qui a deux lettres opposées homologues, aussi-tôt qu'on a accompagné l'une de ces homologues d'une lettre, il faut mettre son analogue avec l'autre (autrement l'on auroit le même nombre) & ensuite il faut mettre leurs conjuguées analogues selon l'article 38.

43. Dans un quadrangle qui a deux directes analogues, aussi-tôt qu'on accompagne l'une d'une lettre, il faut accompagner sa conjuguée de l'homologue de cette lettre, autrement les opposez seroient égaux, & ensuite il faut mettre par analogie les conjuguées de ces nouvelles lettres par l'article 38.

44. Dans les Quarrés impairs on peut placer differemment les moyennes *M* & *n*; mais

de quelques manieres qu'on les place, il doit y avoir une fois *Mn* dans une cellule ; de plus il ne doit y avoir qu'une *M* & une *n* dans chaque horizontale & dans chaque verticale, & en nombre impair dans chaque diagonale.

1°. Dans un Quarré par bandes correſpondantes mettez *Mn* au centre, & *M*, *M*, *n*, *n*, dans les 4 cellules d'un quadrangle de chaque lettre.

2°. Si l'on ne met point de moyenne au centre, il la faut mettre dans chaque diagonale en la place d'une même lettre dont les bandes conjuguées ne ſont pas correſpondantes.

3°. Hors les diagonales l'on peut mettre les moyennes dans les angles oppoſez d'un quadrangle.

4°. Dans les grands Quarrés on peut les mettre dans tel ordre qu'on voudra ſelon l'art. 44.

45. Auſſi-tôt qu'on accompagne une moyenne d'une lettre, il faut accompagner l'autre moyenne conjuguée de ſon analogue, & mettre dans la cellule moyenne ſa directe homologue: (ſi les moyennes *M*, *M*, *n*, *n*, ſont dans des cellules oppoſées d'un quadrangle, cette directe moyenne peut être analogue); il faut enfin mettre les conjuguées analogues de toutes ces lettres accompagnantes; ce qui produit dans chaque bande conjuguée 2, 3 ou 4 homologues.

46. Après avoir ſatisfait aux conditions précédentes, ſi l'on poſe une nouvelle lettre qui doit procurer des homologues dans ſa bande, il faut ordinairement la mettre analo-

gue

gue de celle qui est la plus repetée dans cette bande.

VI. *Construction generale des Quarrés magiques par bandes conjuguées.*

47. Un Quarré étant fait avec ses cellules vuides, *mettez les indices au-dessus & à côté du Quarré*, selon l'art. 35.

Aux indices joignez les lettres, ayant chacune leur analogue, mettant les 2des lettres au-dessus du Quarré, & les 1res lettres à côté dans tel ordre qu'on voudra, chaque lettre & son analogue marqueront leurs bandes conjuguées.

Si chaque lettre & son analogue ont un même indice, le Quarré sera par bandes correspondantes, autrement il sera par bandes non correspondantes ou mixtes, qui ont des varietez differentes pour la pratique, selon que deux lettres analogues ont mêmes ou differens indices, soit que les 1res lettres ayent les mêmes indices que les 2des lettres, ou dans le même ordre, ou dans different ordre, soit qu'ils ayent des indices differens.

Les Quarrés les plus faciles à construire sont les Quarrés par bandes correspondantes, & les plus difficiles sont les Quarrés dont les 1res & 2des lettres ont les mêmes indices dans differens ordres.

48. Aux Quarrés impairs placez les moyennes *M*, *n*. 1°. Si les bandes sont correspondantes, mettez *Mn* au centre, & *M*, *M*, *n*, *n* aux 4 cellules d'un quadrangle de chaque lettre. 2°. En general observez l'art. 44.

49. *Garnissez la 1re diagonale & sa suite.*

	p	q	r	R	ſ		S	t	Q	T	P
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a -5	Mp	ÄQ	äR	är	Aſ	a P	ÄS	á t	Äq	A'T	a. n
b -4	B̈ p	b q	MṘ	Ḃ n	b' S	Ḃ r	B' ſ	b' T	ḃ Q	b t.	B̈ P
c -3	c' p	C̈Q.	c r	C.R	M.Ṡ	ċ ſ	ċ n	c' t	C̈. q	C'T	C' P
d -2	d̈ p	D̈ q	d̈ r	d R	D. ſ	D. t	d S	D.T.	MQ	D n	d̈ P
e -1	é P	Mq	E. r	E'R	e ſ	e Q	E. S	e T	e n	E' t	E' p
o	a. p	e q	B̈R	ḃ r	ċ S	M n	Ċ ſ	E T.	DQ	d. t.	A.P
D 1	D̈ P	d̈ q	D̈R	D r	d'. ſ	d.T.	D S	d. n	d̈ Q	M t.	D̈ p
C 2	C'P	c̈Q	C r	c.R.	c̈ n	ċ Ṡ	M ſ	C t	c̈. q	c' T	c'
E 3	E'P	É n	ë. r	ė R.	E ſ.	E q	é. S.	M T	EQ	é t.	ė p
B 4	b̈ P	BQ.	ḃ n	M r	B̈' S	ḃ R	b̈' ſ	B̈ t	B̈ q.	BT	b̈ p
A 5	A.n	äQ	ÄR	Är	ä S	Ap	ä ſ	A' t	ä q	á T	MP

	p	q	r	R	ſ	S	t	Q	T	P
	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
a -5	ap	áq	ÄR	Ä r	ÄS	Ä ſ	ä t	A'Q	a t	a P
b -4	B̈p	b q	b'R	B' r	B̈ S	B̈ ſ	ḃ T.	ḃ Q	b̈ t.	B̈ P
c -3	c̈ p	C'Q.	c'r	C' R	C̈ S	C̈ ſ	c̈ T	C. q.	c̈ t	c̈ P
d -2	d̈ p	D̈Q	D' r	d R	D. ſ	d S	D.Ṫ.	D̈Q	d' t.	d̈ P
e -1	éP	E' q	E. r	éR	e ſ	E.S	E' t	é Q	é T	E' p
D 1	D̈P	d̈Q	d'R	D r	d'. ſ	D S	d'. T	d̈ q	D' t	D̈ p
C 2	C̈P	c̈Q	C r	c' R̈	r̈ ſ	c̈ S	C t	c. q	C̈T	C̈ p
E 3	E'P	é q	é. r.	E'R.	E ſ	é. S	ë t	EQ	E'T	é p
B 4	b̈P	BQ.	B'R	b' r	b̈ S	b̈ ſ	B̈t	B̈ q.	B T	b̈ p
A 5	Ap	A'q	äR	ä r	ä S	ä ſ	Ä t	á Q	ÄT	A P

Pour garnir la 1re diagonale, il faut mettre dans chaque cellule les deux lettres des indices qui lui répondent, sa suite est l'art. 38.

Si le Quarré est impair, il faut garnir les pla-

places qui ne sont pas occupées par les moyennes; & si une moyenne occupe la place d'une conjuguée analogue, il faut mettre cette analogue dans sa cellule moyenne conjuguée. *

Nous marquons dans les Quarrés précédens & dans le suivant les lettres de la 1re conjuguée diagonale & leur suite par des lettres Romaines.

50. *Garnissez la 2de diagonale de 1res lettres & leur suite.*

Si deux 1res lettres analogues ont mêmes indices, leurs conjuguées auront garni deux cellules de la 2de diagonale, & dans les impairs il pourra y avoir des *M* dans d'autres cellules; mais dans les cellules vuides mettez les 1res lettres par analogie à celles de la 1re diagonale ou à celles des indices: on peut les mettre par homologie dans les grands Quarrés, la suite est aussi l'art. 38. & dans le Quarré de 4. & de 5. l'art. 41.

51. *Garnissez la 2de diagonale de 2des lettres & leur suite.*

Si les 2des lettres analogues ont mêmes indices, il y aura des cellules garnies de 2des lettres dans la 2de diagonale, & dans les Quarrés impairs il pourra y avoir des *n* dans d'autres cellules.

Si deux 1res & deux 2des lettres ont les mêmes indices dans un ordre different, c'est-à-dire, les unes le même positif & negatif, & les autres tous deux negatifs ou tous deux positifs, il faut prendre garde à l'art. 42. Dans les autres cellules faites comme dans l'art. 50. la suite sont les art. 38. 42. & 43.

* *art. 28.*

Nous marquons les lettres de la 2de diagonale & leur suite par des lettres Italiques avec un point au côté droit.

52. *Accompagnez les Moyennes M, n & leur suite*, selon l'art. 45. 46. 42 & 43. Le quarré sera plus aisé, si l'on met *M, M, n, n*, dans les quatre cellules des quadrangles; & encore plus si on les met tous dans les deux diagonales. Ces lettres seront marquées par un point mis dessus.

53. Dans les quarrez impairement pairs, & impairement impairs, *garnissez au moins une fois par homologie chaque couple de verticales conjuguées de deux 1res lettres directes*, c'est afin d'être assûré de pouvoir mettre deux 2es lettres directes par analogie : on s'en peut dispenser dans les verticales où *M M n n* occupent les cellules opposées d'un quadrangle, & lorsque les directes moyennes sont analogues avec celles qui accompagnent les moyennes *M* ou *n* selon l'art. 45.

Nous marquerons les 1res lettres directes homologues chacune de deux points mis dessus.

54. *Garnissez les 1res bandes horizontales de 1res lettres & leur suite*; & pour cela achevez de mettre dans chaque bande la même lettre majuscule & minuscule, en sorte qu'il y en aît autant de l'une que de l'autre.

Cette disposition de minuscule & de majuscule est telle que les directes sont par homologie que nous marquerons deux points, ou par analogie que nous marquerons d'un accent. Dans les pairement pairs ou impairement pairs, on peut mettre toutes les directes par homologie. La suite est l'art 38. pour

gar-

garnir les 2es bandes conjuguées horizontales.

55. *Garnissez de 2es lettres les quadrangles dont les directes sont analogues selon l'art.* 43. & pour cela il faut parcourir par ordre les lettres accentuées * de chaque verticale conjuguée.

56. *Garnissez de 2es lettres les 1res verticales & leur suite.* Faites comme dans l'art. 54. le quarré magique sera parfait en lettres.

57. On construira le quarré magique en nombres. 1°. En appliquant aux lettres dans tel ordre que l'on voudra, les nombres trouvez par les art. 25 & 26. ensorte que la somme des nombres appliquez à deux 1res lettres analogues, soit égale à $2m$, & la somme des nombres appliquez à deux 2es lettres analogues soit égale à $2n$. 2°. Dans chaque cellule au lieu des deux lettres prenez la somme des nombres qui marquent leur valeur comme dans l'art. 18.

Il est évident que les petits quarrez ne peuvent pas être construits avec autant de varietez que les grands ; ainsi il faut les faire à bandes correspondantes, & avec précaution à bandes non correspondantes, sur tout les quarrez impairs.

VII. *Constructions particulieres des Quarrés par bandes conjuguées.* *

58. *Construction d'un Quarré pairement pair par bandes correspondantes.* †

1°. Mettez les Indices & les lettres des In-

* *art.* 54.
* *art.* 28. † *art.* 2.

dices *art.* 47. Il faut que les lettres analogues ayent les mêmes Indices.

	p -4	*q* -3	*r* -2	*ſ* -1	*S* 1	*R* 2	*Q* 3	*P* 4
a -4	a p	*ä q*	*Ä R*	*Ä S*	*Ä ſ*	*Ä r*	*ä Q*	aP
b -3	*B̈ p*	b q	*B̈ R*	*b̈ ſ*	*b̈ S*	*B̈ r*	b Q	*B̈ P*
c -2	*C' P*	*C'Q*	c r	*C̈ ſ*	*C̈ S*	c R	*c' q*	*c'p*
d -1	*D̈p*	*d'Q*	*d' r*	d ſ	d S	*D'R*	*D' q*	*D̈ P*
D 1	*d̈ P*	*D'Q*	*D' r*	D ſ	D S	*d' R*	*d' q*	*d̈ p*
C 2	*c' P*	*c' Q*	Cr	*c̈ S*	*c̈ ſ*	C R	*C' q*	*C' p*
B 3	*b̈ P*	B q	*b̈ R*	B̈ *S*	*B̈ ſ*	*b̈ r*	B Q	*b̈ p*
A 4	A p	*Ä q*	*ä R*	*ä S*	*ä ſ*	*ä r*	*ÄQ*	A P

2°. Dans la 1re diagonale mettez les lettres des Indices qui leur répondent, & enſuite leurs analogues conjuguées * qui rempliront la 2e diagonale.

3°. Rempliſſez les bandes horizontales des 1res lettres. Il faut que dans chaque bande il y ait autant de majuſcules que de minuſcules; mais on peut les diſpoſer enſorte que toutes les directes ſoient par homologie, ou les unes par homologie & les autres par analogie.

Après avoir rempli les 1res bandes horizontales il faut remplir leurs conjuguées par analogie ſelon l'art. 38.

4°. Examinez dans chaque verticale conjuguée ſi deux 1res lettres ſont par analogie, (nous les avons marqué avec des accens ;) & alors

* *Art.* 38.

alors il faut accompagner leurs conjuguées de deux 2es lettres par homologie.

5°. Achevez de remplir les Verticales de 2es lettres, ensorte qu'il y en ait autant de majuscules que de minuscules.

59. *Construction des Quarrés magiques pairement pairs par bandes non correspondantes.*

Nous supposons qu'aucune lettre & son analogue ayent le même Indice, & que deux 2es lettres n'ayent pas les mêmes Indices que deux 1res lettres; car dans ce cas nous renvoyons à la section VI. Il faut remarquer que les petits Quarrés ne sont pas susceptibles d'autant de varietez que les grands.

		p	P	q	r	Q	R	ſ	S
		-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
a	-4	a p	aP	aQ	A R	a q	A r	AS	A ſ
b	-3	B p	bP	bQ	B r	Bq	bR	b S	B ſ
c	-2	C P	Cp	cq	C R	cQ	Cr	c ſ	c S
d	-1	d p	D P	dq	d r	DQ	D R	d ſ	DS
A	1	Ap	A P	A q	aR	AQ	a r	a S	a ſ
B	2	bP	Bp	B q	b r	bQ	BR	BS	b ſ
D	3	D P	dp	DQ	D r	d q	dR	Dſ	d S
C	4	cP	cp	CQ	cR	Cq	c r	Cſ	CS

1°. Placez les indices comme ci-dessus, & les lettres dans les circonstances précédentes.

2°. Remplissez la 1re diagonale des lettres

tres des indices, & mettez leurs analogues conjuguées.

3°. Remplissez la 2de diagonale en mettant des lettres qui soient analogues à leurs directes de la 1re diagonale (on peut les mettre homologues dans les grands Quarrés) mettez ensuite les conjuguées analogues.

4°. Achevez comme dans l'art. 58.

60. Construction des Quarrés pairement pairs par bandes mixtes.

Suivez les regles de la construction generale Section VI.

61. Construction des Quarrés impairement pairs par bandes conjuguées.

Suivez les articles 58. 59. 60. en leur ajoûtant l'art. 53.

62. Construction des Quarrés pairement impairs par bandes correspondantes.

1°. Mettez les indices & leurs lettres selon l'art. 35. ou 47. ou 58.

		P -2	*q* -1	*n* 0	*Q* 1	*P* 2
a	-2	M p	*A q*	*a* P	*A Q*	*a* n
b	-1	B P	b n	b *Q*	M *q*	B p
M	0	*a* p	B *Q*	M n	b *q*	*A* P
B	1	b P	M *Q*	B *q*	B n	b p
A	2	*A* n	*a q*	*A* p	*a Q*	M P

2°. Mettez les moyennes *M*, *M*, *n*, *n*, dans les angles d'un quadrangle, ensorte que 1°. *M*, *M* aussi-bien que *n*, *n* soient dans les cellules

les opposées d'un même quadrangle. 2°. Qu'il y ait un *M* & un *n* dans chaque horizontale & dans chaque verticale, les diagonales peuvent avoir toutes ces moyennes ou en partie, mais le centre doit avoir *Mn*.

		p	*q*	*n*	*Q*	*P*
		-2	-1	0	1	2
a	-2	a p	M Q	A q	A n	a P
b	-1	B n	b q	B P	b Q	M p
	0	b P	A Q	M n	a q	B p
B	1	M P	B q	b p	B Q	b n
A	2	A p	a n	a Q	M q	A P

3°. Remplissez les cellules de la 1re diagonale, en mettant les lettres des indices dans les places qui ne sont pas occupées par les moyennes; mettez ensuite leurs conjuguées analogues qui se trouveront placées dans la 2de diagonale, ou dans la bande moyenne si leur place est occupée dans la 2de diagonale par *M* ou par *n*.

4°. Remplissez la 2de diagonale des lettres qui y manquent, & mettez leurs conjuguées analogues comme ci-dessus.

5°. Accompagnez de 2des lettres analogues les *M*, *M* des bandes conjuguées *, mettez ensuite leurs conjuguées par analogie & leurs moyennes par homologie : on le peut aussi par l'analogie ; faites la même chose aux moyen-

* *art.* 45.

moyennes *n*, *n*. Nous avons marqué les 1res & 2des lettres qui accompagnent *M*, *n*, & leur suite par un point.

6°. Achevez le Quarré comme dans l'art. 58.

63. Si le Quarré est impairement impair, ajoûtez l'article 53.

64. Si le Quarré impair est par bandes non correspondantes,

1°. Placez les indices comme dans l'article 59. & les moyennes comme dans l'article 62. alors la construction devient facile, & convient aux petits Quarrés impairs.

		p -2	q -1	0	P 1	Q 2
a	-2	M p	a Q	A P	A n	a q
b	-1	B P	b n	b q	B p	M Q
	0	A p	B q	M n	a P	b Q
A	1	a n	A Q	a p	M P	A q
B	2	b P	M q	B Q	b p	B n

2°. Ou placez les indices selon l'article 60. & les moyennes selon l'article 44. alors la construction demande une grande attention pour y appliquer les regles de la Section VI. & les maximes de la Section V. sur-tout dans les petits Quarrés où plusieurs cas sont impossibles.

VIII.

VIII. *Construction des Quarrés magiques par lettres analogues & par bandes interrompuës.*

65. *Construction des Quarrés magiques impairs par diagonales, par indices & par la methode mixte * avec les lettres analogues.*

		0	1	2	3	4
0.	0	*a p*	*b P*	*M q*	*B Q*	*A n*
2.	3	*MQ*	*B n*	*A p*	*a P*	*b q*
4.	1	*A P*	*a q*	*b Q*	*M n*	*B p*
1.	4	*b n*	*M p*	*B P*	*A q*	*a Q*
3.	2	*B q*	*A Q*	*a n*	*b p*	*MP*

Au lieu des lettres generales de la Section II. mettez les analogues *M a A b B* & *n p P q Q*, & dans les articles 13. & 16. il faut mettre *M* & *n* dans les diagonales en la place des lettres repetées; ainsi au lieu du Quarré de l'article 14. vous aurez ce Quarré.

66. *Construction des Quarrés magiques par analogie & par bandes interrompuës.*

Il faut mettre, 1°. dans les deux diagonales telles lettres qu'il vous plaira par analogie.

2°. Il faut placer tellement la 1re lettre *aA*, qu'il y en ait autant dans tout le quarré qu'il y a de cellules dans deux bandes, dont une moitié soit majuscule & l'autre minuscule, en-

* *art.* 13. 14. 16.

ensorte que dans chaque bande horizontale & verticale chaque *aA* ait son analogue : pour faciliter cet arrangement il faut d'abord mettre un point pour *a* & deux points pour *A*, & quand l'arrangement est fait en la place de ces points il faut mettre *a. A.*

3°. Il faut mettre *pp P P* après quatre *aa AA* selon l'art. 34. ensuite *qq Q Q* & ainsi les autres en commençant par les 2des lettres qui sont déja les plus repetées, il faut mettre ces 2des lettres avec ces précautions, 1°. qu'on les mette autant qu'on peut par analogie dans chaque horizontale & dans chaque verticale, & à mesure qu'on met une analogue dans une horizontale, mettez un point sur les deux 2des lettres analogues, & un accent sur les analogues dans chaque verticale.

4°. Il faut faire la même chose après les autres 1res lettres en suivant les regles generales.

La brieveté de cet Ouvrage ne permet pas d'entrer dans un long détail pour ces sortes de Quarrés, ni pour les suivans.

67. Les autres manieres de construire un Quarré magique par analogie sont les suivantes.

1°. *Par échange de bandes paralleles*, 1°. Il faut avoir un Quarré magique formé par quelqu'une des methodes précedentes. 2°. Au lieu de mettre dans les cellules des lettres ou des nombres, il faut mettre leurs differences. 3°. Considerez dans deux bandes paralleles deux quadrangles ou quarrés de cellules dont celles des diagonales soient les cellules opposées : si la somme des differences des cellules opposées d'un quadrangle est égale à la somme des

des differences des deux autres cellules du même quadrangle & que la même chose arrive à l'autre quadrangle, alors les deux bandes paralleles peuvent être échangées comme dans l'art. 23.

2°. *Par échange de cellules ou de lettres*, 1°. Si deux cellules d'une bande ont les 4 lettres par analogie, elles peuvent être échangées contre deux autres cellules d'une autre bande parallele, mais dans les mêmas bandes perpendiculaires qui auront aussi 4 lettres par analogie. 2. Deux lettres directes analogues peuvent être échangées contre deux autres directes analogues dans les mêmes bandes perpendiculaires, pourvû que les lettres de l'autre espece soient les mêmes.

L'on peut varier les Quarrés par ces differentes échanges.

3°. *Par lettres étrangeres*, 1°. En mettant 4 lettres étrangeres analogues en la place de 4 lettres naturelles qui sont analogues dans une bande ou dans deux bandes conjuguées, ce qui peut varier. On peut aussi faire ce Quarré par l'article 66.

IX. *Construction des Quarrés Magiques par les autres manieres.*

69. *Par Réciprocation* *. 1°. Ayez un Quarré Magique fait par analogie selon quelques-unes des Constructions précedentes; mais au lieu de lettres, mettez leurs differences que nous supposons ordonnées: par exemple un Quarré de 8 par bandes correspondantes selon l'art. 58. dont les premieres lettres directes soient

* *art. 31.*

ſoient homologues, & les 2es lettres directes ſoient la plûpart analogues.

-7λ -7	7λ 5	-7λ -3	7λ 1	7λ -1	-7λ 3	7λ -5	-7λ 7
5λ 7	-5λ 5	5λ 3	-5λ -1	-5λ 1	5λ -3	-5λ -5	5λ -7
-3λ 7	3λ -5	-3λ -3	3λ 1	3λ -1	-3λ 3	3λ 5	-3λ -7
1λ 7	-1λ -5	1λ 3	-1λ -1	-1λ -1	1λ -3	-1λ 5	1λ -7
-1λ 7	1λ -5	-1λ 3	1λ -1	1λ -1	-1λ -3	1λ 5	-1λ -7
3λ -7	-3λ 5	3λ -3	-3λ 1	-3λ -1	3λ 3	-3λ -5	3λ 7
-5λ -7	5λ 5	-5λ -3	5λ 1	5λ -1	-5λ 3	5λ -5	-5λ 7
7λ -7	-7λ -5	7λ 3	-7λ -1	-7λ 1	7λ 3	-7λ 5	7λ 7

2°. Choiſiſſez deux cellules horizontales —7λ+3. & 7λ—5, & deux autres correſpondantes dans les mêmes bandes verticales, dans leſquelles la ſomme des differences des 1res lettres —7λ. +7λ qui ſe répondent horizontalement & verticalement, ſoit égale à zero, & celle des 2es lettres 3.—3.—5.+5 qui ſe répondent verticalement, ſoit auſſi égale à zero;

zero; & dont leurs sommes prises horizontalement $3.-5=-2$ & $-3+5=2$ soient égales entr'elles, mais l'une positive & l'autre negative.

3°. Choisissez 4 semblables cellules comme $3\lambda+5$, $-3\lambda-7$ & $-3\lambda-5$, $3\lambda+7$, dont les differences soient dans les mêmes circonstances; mais il ne faut point toucher aux cellules des diagonales.

4°. Echangez les 4 premieres cellules contre les 4 dernieres, le Quarré restera magique, & les 4 bandes horizontales auront des lettres réciproques ou sans analogues.

On peut faire de semblables échanges qui peuvent varier indéfiniment, soit 1°. En construisant le même Quarré par bandes non correspondantes, ou par bandes mixtes; & si les deux sommes des 2des lettres sont égales à zero de tout sens, on construira un Quarré par bandes interrompuës, comme nous avons dit dans l'art. 66. 2°. On peut de même prendre deux cellules dans des bandes verticales. 3°. Au lieu de prendre dans chaque horizontale deux cellules, on en peut prendre 3 ou davantage avec les mêmes conditions. 4°. Après avoir fait une échange, on en peut faire par ordre plusieurs autres semblables. 5°. Au lieu de supposer que les sommes des differences des 1res lettres sont égales à zero, on les peut prendre égales entr'elles; mais l'une positive & l'autre negative, & faire de même à la somme des differences des 2des letttes.

L'on peut construire ces Quarrez en mettant des réciproques dans les diagonales.

70. *Par excedans & défaillans* *. Il faut ren-

* *V.* Art. 32.

rendre dans une bande l'excès des 1res lettres égal au défaut des 2des lettres, ou réciproquement le défaut des 1res lettres égal à l'excès des 2des lettres, afin que la somme des 1res & des 2des lettres de cette bande soit égale à $rm + rn$. Il suffit d'examiner la maniere de rendre l'excès des 1res lettres égal au défaut des 2des lettres, parceque l'on a le réciproque en changeant les signes des differences; de plus nous supposerons que les differences sont ordonnées *.

1°. L'excès des 1res lettres est au plus $\frac{1}{4}r\lambda$ dans les Quarrés impairs, & $\frac{1}{2}r\lambda$ dans les Quarrés pairs, & alors $\frac{1}{2}r$ doit être un nombre pair.

2°. Pour avoir l'excès des 1res lettres, prenez une ou plusieurs differences dont la somme soit égale à cet excès: par exemple, dans les Quarrés impairs si l'excès est 1λ, prenez 1λ ou $2\lambda - 1\lambda$ ou $3\lambda - 2\lambda$ &c. si l'excès est 2λ, prenez 2λ ou $3\lambda - 1\lambda$ &c. Dans les Quarrés pairs les differences que l'on prend doivent être paires; ainsi si l'excès est 2λ, prenez 2λ ou $4\lambda - 2\lambda$ ou $6\lambda - 4\lambda$: si l'excès est 4λ, prenez 4λ ou $6\lambda - 2\lambda$ ou $8\lambda - 4\lambda$: si l'excès est 6λ, prenez 6λ ou $8\lambda - 2\lambda$ ou $10\lambda - 4\lambda$ ou $6\lambda + 4\lambda - 2\lambda - 2\lambda$.

3°. Pour avoir le défaut des 2des lettres, prenez un nombre negatif égal à l'excès des 1res lettres, partagez ce nombre en plusieurs parties; ainsi dans le Quarré de 8 si l'on a pris $2\lambda = 8$, il faut partager -8 en $-7-1$ ou $-6-2$ ou en $-5-2-1$ &c.

4°. Pour avoir une bande par excedans & défaillans, prenez des differences des 1res lettres

tres

* V. art. 25. & 26.

tres & 2des lettres, dont les sommes soient égales aux excès des 1res lettres & aux défauts des 2des lettres, ajoûtez ces differences à celles qui sont dans cette bande, vous aurez de nouvelles differences qui rendront cette bande par excedans & défaillans égale à $rm + rn$.

5°. Si l'on veut changer seulement les signes des differences d'une bande, partagez les excès & les défauts en nombres pairs qui soient doubles des differences qui sont dans cette bande, ajoûtez ces differences doubles aux simples qui ont un signe contraire, vous aurez les mêmes differences qui auront seulement changé de signes.

6°. Ayant une bande par excedans & défaillans, l'on peut remplir une bande parallele des analogues des lettres de la précédente bande, & l'on aura une seconde bande par défaillans & excedans.

7°. Le changement que l'on a fait pour rendre une bande & sa conjuguée par excedans & défaillans, a introduit de nouvelles lettres & a ôté les anciennes qu'il faut remettre en la place de ces nouvelles, en rendant d'autres bandes par analogie, par réciprocation ou par excedans & défaillans, ce qui demande ici un trop grand détail.

71. *Par la methode mixte des lettres analogues*, en mettant les lettres réciproques avec les excedans & défaillans; mais il y aura toûjours des bandes dans lesquelles des lettres auront leurs analogues.

72. *Par Quarré magique composé.* La racine de ce Quarré doit être le produit de plusieurs nombres plus grands que 2, comme $3 \times 3 = 9$.

$=9$. $3\times4=12$. $3\times35=105$. ou $7\times15=105$. &c. Proposons-nous le Quarré de $15=3\times5$. dont les lettres sont *ABC. DEF. GHI. KLM. NOP. pqr. ſtu. xyz. abc. def.*

1°. Je diviſe ces lettres de 3 en 3, (on peut le faire de 5 en 5) & je prens les 1res lettres après les diviſions *ADGKN. pſxad.* que j'appelle *les Indicantes* des petits Quarrés.

2°. Je fais un Quarré magique de 5 avec ces lettres indicantes, j'aurai *un Quarré indicant.*

3°. Je diviſe le Quarré de 15 en 25 petits Quarrés, en marquant plus fort les verticales & horizontales de 3 en 3. Ce grand Quarré ſera diviſé en 25 petits Quarrés qui répondront aux 25 cellules du Quarré indicant dont les cellules contiendront les lettres indicantes de chaque petit Quarré qui lui répond dans le grand.

4°. Prenez les lettres indicantes *Ap* de la 1re cellule du Quarré indicant, elles marquent qu'il faut prendre les lettres *ABC*, *pqr* pour faire le 1er petit Quarré; de même *Dſ* marqueront qu'il faut prendre *DEF*, *ſtu* pour le 2d petit Quarré, & ainſi des autres.

Le Quarré indicant & les petits Quarrés ſe conſtruiſent ſelon les methodes précedentes.

5°. Pour mettre en nombre un Quarré magique composé en lettres, il faut avoir égard à la Section III. & aux articles 25 & 26.

X. *Des Enceintes, des Croix & des Chaſſis magiques.*

73. * *Une Enceinte magique* eſt une ou plu-ſieurs

* Voyez les Quarrés des art. 65. & 77.

ſieurs bandes qui entourent un Quarré magique, enſorte que l'enceinte avec le quarré interieur forment un Quarré total qui eſt auſſi magique.

La Croix eſt un aſſemblage de deux ou de pluſieurs bandes verticales, & d'autant de bandes horizontales ramaſſées vers le milieu d'un Quarré magique qu'elles ſeparent en 4 quartiers, enſorte que la Croix avec ces 4 quartiers forment encore un Quarré magique.

Le Chaſſis eſt auſſi un aſſemblage de deux ou de pluſieurs bandes verticales & d'autant de bandes horizontales, mais qui ſont ſeparées les unes des autres, & dont les verticales coupent les horizontales dans les diagonales, enſorte que le Quarré magique qui ſe trouve ſeparé par ce Chaſſis, forme avec lui un Quarré total qui eſt encore magique.

74. Une Enceinte peut être formée par une ſeule bande de chaque côté du quarré renfermé, ou par pluſieurs bandes. Nous les appellerons Enceinte à ſimple bande, à double, à triple bande, &c.

Un Quarré magique peut être enfermé par une ſeule enceinte magique ou par pluſieurs, qui ſont telles qu'en ôtant une ou pluſieurs enceintes les plus exterieures, le quarré reſtant eſt toûjours magique, chacunes de ces Enceintes peuvent être à ſimple bande, à double bande, &c.

Une Enceinte a des bandes horizontales & verticales qui ſont entieres, & des bandes horizontales, verticales & diagonales qui ſont interrompuës.

Le quarré renfermé dans une Enceinte peut

être formé par ses lettres naturelles sans lettres étrangeres, que nous appellerons *lettres anciennes*; mais il en faut d'autres pour former l'enceinte; que nous appellerons *lettres nouvelles*; & en ce cas l'enceinte contient autant de 1res & de 2des lettres nouvelles, qu'il y a de bandes horizontales au haut du Chassis; de plus le nombre de chaque lettre nouvelle avec ses analogues est égal au nombre des cellules de deux bandes entieres, & le nombre de chaque lettre ancienne avec ses analogues qui doivent servir à former l'enceinte, est égal au nombre des cellules de deux bandes interrompuës; enfin chaque ancienne lettre doit être accompagnée d'une nouvelle.

Si l'on se sert des lettres nouvelles comme de lettres étrangeres pour former le quarré renfermé *, il faut les remplacer dans l'enceinte par les lettres anciennes dont elles occupent la place.

La somme des differences des lettres qui remplissent une bande entiere ou une bande interrompuë d'une enceinte, doit être égale à zero ; c'est-pourquoi dans une enceinte à bande unique, les cellules opposées d'une bande interrompuë ont leurs lettres analogues.

On regle les lettres de chaque bande entiere & de chaque bande interrompuë comme celles des deux Quarrés par lettres analogues, qui auroient leurs racines égales au nombre des cellules d'une bande entiere & d'une bande interrompuë. La petite racine est toûjours paire, & elle est pairement ou impairement paire, si le nombre des bandes de chaque côté du

* art. 67.

du Chaſſis eſt pair ou impair. A l'égard de la grande racine elle eſt paire ou impaire, ſi le quarré renfermé eſt pair ou impair; c'eſt-pourquoi on reglera la conſtruction d'un Chaſſis par celle des deux Quarrés qui auront pour racines les nombres des cellules d'une bande entiere & d'une bande interrompuë du Chaſſis, & on conſtruira pluſieurs Chaſſis autour d'un Quarré, en commençant par les Chaſſis les plus interieurs, & finiſſant par les plus exterieurs, & en conſiderant les Chaſſis déja conſtruits avec le Quarré renfermé, comme s'ils ne formoient enſemble qu'un ſeul Quarré.

75. Les Enceintes peuvent être conſtruites en general par analogie, par réciprocation, & par excedans & défaillans. Il y en a qui ne peuvent pas être conſtruites par analogie, comme les enceintes à bande unique, & dont la grande racine eſt impairement paire; d'autres par excedans & défaillans, comme l'enceinte à bande unique dont la grande racine eſt 5.

A l'égard des bandes interrompuës, les horizontales peuvent s'échanger les unes contre les autres auſſi-bien que les verticales, parce-qu'elles n'ont rien à ménager du côté des diagonales.

76. Dans une Enceinte à bande unique il ne faut avoir égard qu'à la bande horizontale ſuperieure, & qu'à la premiere verticale qui forment enſemble une équerre, laquelle a la cellule *angulaire* (*cq*) commune aux deux bandes, & dont les lettres ſont par conſéquent homologues pour l'une & pour l'autre bande, & les cellules *extrêmes* [*CR*] [*cr*] dont les lettres ſont analogues, les autres cellules des

bandes interrompuës, comme *CQ*, *aR*, *AR*, *Br* sont *les moyennes*, de leur bande. A l'égard des deux autres bandes correspondantes de l'Enceinte, elles ont leurs lettres analogues à celles de l'équerre qui leur répondent par diagonale, horizontalement ou verticalement.

Pour former une enceinte à bande unique comme de 6. autour d'un quarré de 4, dont les anciennes lettres sont *ab*, *pq*, & les nouvelles *c*, *r*.

ENCEINTE.

c q	C P	c P	C r	b r	C R
c Q	*a p*	*A Q*	*A q*	*a P*	C q
a R	*B P*	*b q*	*b Q*	*B p*	A r
A R	*b P*	*B q*	*B Q*	*b p*	a r
B r	*A p*	*a Q*	*a q*	*A P*	b R
c r	c p	C p	c R	B R	C Q

Bande horizontale						*Bande verticale.*					
1λ	-1λ	-1λ	1λ	-3λ	1λ	-1λ	-1λ	-5λ	5λ	3λ	-1λ
C	(*c*)	*c*	[*C*]	*b*	*C*	(*c*)	*c*	*a*	*A*	*B*	[*c*]
P	(*q*)	*P*	[*R*]	*r*	*r*	(*q*)	*Q*	*R*	*R*	*r*	[*r*]
5	-3	5	1	-1	-1	-3	3	1	1	-1	-1

Formez les deux bandes de l'Equerre de cette maniere. 1°. Mettez les nouvelles lettres avec leurs analogues *cccccc*, *rrrrrr*, & les anciennes *aa*, *bb*, *pp*, *qq* dans la bande horizontale & dans les cellules moyennes de la bande verticale. 2°. Si vous voulez faire la bande horizontale par excedans & défaillans, en-

entre les 1res lettres choisissez celles dont la somme des differences soit —2λ & par conséquent le défaut est —2λ=—6 : & accompagnez les 1res lettres de 2des lettres dont la somme des differences soit +6. 3°. Mettez le reste des 1res & 2des lettres dans les 4 cellules moyennes de la bande verticale, & ajoûtez deux cellules de la bande horizontale, savoir l'angulaire *cq* par homologie, & l'extrême *cr* par analogie. Toutes ces lettres doivent être tellement disposées, que les sommes des differences des 1res lettres & des 2des lettres soient égales à zero, ou elles doivent être par excedans & défaillans, & alors on aura deux bandes de l'enceinte, savoir une horizontale & une verticale ; & l'on aura les bandes opposées en prenant les analogues des lettres des bandes précedentes.

Dans l'arrangement précedent des 1res & 2des lettres, il faut avoir égard d'accompagner toûjours deux homologues de deux analogues & deux analogues de deux homologues.

77. Une enceinte étant construite, on fera

CROIX.

a p	*AQ*	cQ	Cq	*Aq*	*aP*
BP	*b q*	aR	Ar	*bQ*	*Bp*
CP	cP	c q	CR	Cr	br
c p	Cp	c r	CQ	cR	BR
bP	*B q*	AR	a r	*BQ*	*bp*
A p	*a Q*	B r	b R	*a q*	*AP*

 une

CHASSIS.

ap	cQ	*AQ*	*Aq*	Cq	*aP*
CP	c q	cP	C r	C r	br
PB	a R	*b q*	*bQ*	Ar	*Bp*
bP	AR	*Bq*	*BQ*	a r	*bp*
cp	cr	C p	cR	CQ	Br
AP	Br	*aq*	*aQ*	bR	*AP*

une Croix, ou un Chaſſis, en mettant toûjours dans les diagonales les cellules des diagonales de l'enceinte, & en diſpoſant tellement les autres cellules, qu'après le changement les bandes horizontales & verticales conſervent toûjours leurs mêmes cellules.

XI. *Des Cubes magiques, & des Quarrés à pluſieurs eſpeces de lettres.*

78. * Un *Cube magique* eſt un Cube diviſé en cellules cubiques qui renferment chacun un nombre, qui eſt tel que la ſomme de tous les nombres qui ſont dans chaque couche quarrée parallele aux 3 baſes, ou qui ſont dans chacune des ſix plans ou couches qui coupent les diagonales des baſes oppoſées, eſt toûjours la même.

79. Un *Cube magique geometrique* eſt à l'égard

* 3. Decembre.

gard du précédent Cube qui eſt arithmetique, ce que le Quarré magique geometrique eſt à l'égard du Quarré magique ordinaire qui eſt auſſi arithmetique; c'eſt-pourquoi il faut ici appliquer la remarque de l'article 11.

80. Dans un Cube magique il y a 3 ſortes de lettres; ſavoir, les 1[res] lettres *ABCDE* &c. & leur moyenne *M*, les 2[des] lettres *pqrst* &c. & leur moyenne *n* & les 3[mes] lettres $\pi \rho \sigma \tau \upsilon$ &c. & leur moyenne μ, leſquelles peuvent être generales ou par analogie comme dans les Quarrés magiques.

81. Les nombres qui répondent aux 3[mes] & 2[des] lettres Cubes magiques, ſont les mêmes que ceux qui répondent aux 2[des] & 1[res] lettres des Quarrés magiques. A l'égard des nombres qui repondent aux 1[res] lettres des Cubes magiques, le plus petit nombre eſt auſſi égal à zero; mais le ſecond nombre & la difference des autres nombres eſt au moins égal à la ſomme du plus grand des 2[des] & du plus grand des 3[mes] lettres.

82 Je me contenterai de donner la conſtruction par diagonale du Cube de 5, parce qu'à l'imitation de cette conſtruction on pourra imaginer les autres.

1[res] lettres	*A*	B	*N*	*C*	*D*
1[rs] nombres	0	$1x$	$2x$	$3x$	$4x$
	0	25	50	75	100.
2[des] lettres	*p*	*q*	*n*	*r*	*ſ*
2[ds] nombres	0λ	1λ	2λ	3λ	4λ
	0	5	10	15	20
3[mes] lettres	π	ρ	μ	σ	τ
3[mes] nombres	1	2	3	4	5

H 4 Les

Les 3mes & 2ds nombres sont ici les mêmes que les 2ds & 1rs qui sont trouvez par les articles 7. 8. 18. 19. 20. &c.

Dans les 1rs nombres du Cube magique $A=0$. B ou $1x=\int+\tau=4\lambda+5=25$. A ces 1rs on peut ajoûter des 2des differences comme aux 2ds nombres des Quarrés magiques.

1°. Dans les 3 faces qui forment un angle solide du Cube, écrivez d'ordre les 1res, 2des, & 3es lettres, en sorte que les moyennes M, n, μ, soient les plus éloignées de cet angle.

2°. Mettez les moyennes dans les cellules de leurs diagonales, & les autres lettres d'ordre, comme dans l'art. 13.

3°.

3°. Mettez chaque 1re lettre dans les 5 cellules cubiques interieures qui leur répondent perpendiculairement; faites la même chose aux 2des & aux 3es lettres. Chaque cellule cubique interieure aura trois lettres, savoir chacune aura une 1re, une 2e & une 3e lettre, & le cube sera magique en lettres.

On le rendra Cube magique en nombres mettant les nombres appliquez aux lettres en la place des lettres, comme dans l'art. 18.

Pour concevoir mieux les 125 cellules du cube magique de 5, j'ai partagé le cube en 5 couches quarrées paralleles à la face des 1res lettres & qui contiennent chacun 25 cellules, & chaque cellule 3 lettres. La somme des nombres de chaque couche est $\overline{m+n+\mu} \times rr$, & la somme de tous les nombres du cube magique est $\overline{m+n+\mu} \times r^3$.

Pour distinguer les couches paralleles à l'une de ces 3 faces du Cube, prenez 5 bandes qui ayent toutes les 25 lettres de cette face, & dans chacune desquelles une lettre des autres especes soit repetée.

	1				3	
2	5 Mnρ	Apρ	2 Bqρ	Crρ	6 Dsρ	4
	Dnσ	5 Mpσ	Aqσ	6 Brσ	Csσ	
	Cnτ	Dpτ	5 6 Mqτ	Arτ	Bsτ	
	Bnυ	6 Cpυ	Dqυ	Mrυ	Asυ	
4	6 Anμ	4 Bpμ	4 Cqμ	4 Drμ	5 Msμ	2
	1				3	

	1				3	
4	5 Msσ	Anσ	Bυσ	Cqσ	6 Drσ	
2	Dsτ	5 Mnτ	Apτ	6 Bqτ	Crτ	2
	Csυ	Dnυ	5 6 Mpυ	Aqυ	Brυ	
4	Bsμ	6 Cnμ	Dpμ	5 Mqμ	Arμ	4
2	6 Asρ	Bnρ	Cpρ	Dqρ	5 Mrρ	
	1				3	

 4°.

1. 3.

	5 Mrτ	Aſτ	Bnτ	Cpτ	6 Dqτ	
	Drυ	5 Mſυ	Anυ	6 Bpυ	Cqυ	
2	Crμ	Dſμ	5 6 Mnμ	Apμ	Bqμ	2
4	Brρ	6 Cſρ	Dnρ	5 Mpρ	Aqρ	4
	6 Arσ	Cſσ	Cnσ	Dpσ	5 Mqσ	

1. 3.

1 5

	5 Mqυ	Arυ	Bſυ	Cnυ	6 Dpυ	
4	Dqμ	5 Mrμ	Aſμ	6 Bnμ	Cpμ	4
	Cqρ	Drρ	5 6 Mſρ	Anρ	Bpρ	
2	Bqσ	6 Crσ	Dſσ	5 Mnσ	Apσ	2
	6 Aqτ	Brτ	Cſτ	Dnτ	5 Mpτ	

3 1

3 8

4	5 Mpμ	Aqμ	Brμ	Cſμ	6 Dnμ	4
4	Dpρ	5 Mqρ	Arρ	6 Bſρ	Cnρ	
	Cpσ	Dqσ	5 6 Mrσ	Aſσ	Bnσ	
2	Bpτ	6 Cqτ	Drτ	5 Mſτ	Anτ	
2	6 Apυ	Bqυ	Crυ	Dſυ	5 Mnυ	2

3 1

4. Nous avons marqué les ſix couches qui paſſent par les diagonales avec les nombres 11:22:33:44:55555.66666.

83. L'on peut auſſi appliquer trois ſortes de lettres & même plus, à un quarré magique, & voici une maniere de les employer.

Propoſons-nous un Quarré magique de 7 par lettres generales à conſtruire avec 3 ſortes

tes de lettres *ABCDEFG* : *pqrſtux* : πρστ υψχ.

	0	1	2	3	4	5	6
0. 0. 0.	*Ap*π	*Bq*ρ	*Cr*σ	*Dſ*τ	*Et*υ	*Fu*ψ	*Gx*χ
2. 3. 4.	*Cſ*υ	*Dt*ψ	*Eu*χ	*Fx*π	*Gp*ρ	*Aq*σ	*Br*τ
4. 6. 1.	*Ex*ρ	*Fp*σ	*Gq*τ	*Ar*υ	*Bſ*ψ	*Ct*χ	*Du*π
6. 2. 1.	*Gr*ψ	*Aſ*χ	*Bt*π	*Cu*ρ	*Dx*σ	*Ep*τ	*Fq*υ
1. 5. 2.	*Bu*σ	*Cx*τ	*Dp*υ	*Eq*ψ	*Fr*χ	*Gſ*π	*At*ρ
3. 1. 6.	*Dq*χ	*Er*π	*Fſ*ρ	*Gt*σ	*Au*τ	*Bx*υ	*Cp*ψ
5. 4. 3.	*Ft*τ	*Gu*υ	*Ax*ψ	*Bp*χ	*Cq*π	*Br*ρ	*Eſ*σ

Mettez les Indices au deſſus du Quarré & 3 colonnes d'Indices à côté. Achevez enfin le quarré ſelon l'art. 14.

Remarquez 1°. que ſi on ne peut pas mettre autant de colonnes d'Indices qu'il y a de lettres, il faut employer pour une ou deux ſortes de lettres la méthode des diagonales *art.*13. *ou* 16. ou quelques-unes des méthodes par les lettres analogues; ou enfin employer pour toutes les ſortes de lettres les differentes manieres par lettres analogues.

2°. S'il y a des lettres repetées dans les diagonales, il faut que la ſomme de leur difference ſoit égale à zero *.

3°. A l'égard des valeurs de lettres, il faut diſtinguer deux claſſes de lettres: la 1re claſſe des

H 6

* Voy. Sect. III.

des lettres ordonnées ſont des eſpeces de lettres dont les valeurs ſont reglées ſur celles des 1res ou 2des lettres ordinaires: la 2e claſſe des lettres deſordonnées eſt celle des eſpeces de lettres, dans chacune deſquelles les lettres ou leurs differences peuvent être égales ou inégales, ou quelques-unes égales à zero.

4°. Mais de quelque maniere que l'on diſpoſe ces claſſes, la derniere eſpece de lettre doit être de petits nombres; la penultiéme eſpece doit être multiple de λ, ſuppoſant λ au moins égal au plus grand nombre de la derniere claſſe s'il n'y a point de zero, ou plus grand de 1, s'il y a des zero: l'antépenultiéme eſpece doit être multiple de $\varkappa$, ſuppoſant x au moins égal à la ſomme des plus grands nombres des eſpeces précedentes, & ainſi de ſuite.

Au reſte il faut, que dans l'une de ces eſpeces il n'y ait point de zero, ſoit par le moyen des multiples λ ou $\varkappa$, ſoit par les 2es differences.

Ainſi dans le Quarré précedent de 7, l'on aura les valeurs des lettres ſelon cette Table.

Eſpece de lettres ordonnées.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
	0	$1\varkappa$	$2\varkappa$	$3\varkappa$	$4\varkappa$	$5\varkappa$	$6\varkappa$
	0	21	42	63	84	105	126
Eſpece de lettres deſordonnées.	*p*	*q*	*r*	*ſ*	*t*	*u*	*x*
	0	0	0	0	1λ	2λ	2λ
					7	14	14
Eſpece de lettres ordonnées.	π	ρ	σ	τ	υ	ψ	χ
	1	2	3	4	5	6	7

C'eſt à cet article qu'on peut rapporter l'art. 10.

XII. *Variations des Quarrés magiques.*

Il y a en general deux sortes de variations, l'une de nombres & l'autre de méthodes.

84. *La variation de nombres.* C'est lorsqu'ayant appliqué aux lettres leurs valeurs en nombres selon la Section III. & les articles 25 & 26, on change ensuite les valeurs des lettres de toutes les manieres possibles suivant les regles des permutations & des combinaisons.

Pour avoir toutes les permutations des nombres de plusieurs lettres differentes, il faut multiplier ensemble les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. jusqu'à celui qui marque le nombre des choses à permuter. Ainsi le nombre des permutations de 5 lettres est 120.

Pour marquer les permutations d'un nombre de lettres, nous mettrons P devant ce nombre; ainsi $P5 = 120$. & $Pr = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times r$, c'est-à-dire que Pr est égal au produit de tous les nombres depuis 1 jusqu'à r qui exprime la racine du Quarré.

Pour avoir toutes les variations des premieres & des secondes lettres, il faut multiplier le nombre des permutations des 1res lettres par le nombre des permutations des 2des lettres, comme $P5 \times P5$, ou $P5^2 = 14400$.

85. *La variation de Méthodes.* Ce sont les differentes Méthodes selon lesquelles l'on peut faire des Quarrés magiques; dans chacune desquelles variant les nombres qui marquent les valeurs des lettres selon toutes les manieres possibles, l'on ne tombe point dans

les mêmes arrangemens de nombres que dans ceux d'une autre Méthode.

Comme ces differentes méthodes ou manieres de conftruire des Quarrés magiques font indefinies, il eft difficile quoique poffible de les déterminer dans chaque quarré, & encore plus dans les quarrés en general. Nous nous contenterons de mettre ici les principales méthodes avec leurs variations de nombres.

1°. *Par les Diagonales* *. Les variations de nombres font $\frac{\overline{Pr-1}^2}{4}$. Car 1°, le nombres des 1res lettres variables eft $\overline{Pr-1}$ (la lettre repetée dans la diagonale ne variant point) & des 2es lettres eft auffi $\overline{Pr-1}$, dont les variations des 1res & 2es lettres eft $\overline{Pr-1} \times \overline{Pr-1} = \overline{Pr-1}^2$. 2°. Il y a 4 fortes de variations qui font les mêmes. Car fuppofant dans le Quarré de l'art. 13. qu'on ait donné des valeurs aux lettres, fi l'on donne à *E* la valeur de *B* ou à *s* la valeur de *p*, & que l'on change par ordre les autres nombres, l'on aura un 2d Quarré qui fera le même que le 1er dont le haut eft renverfé fur le côté. On aura la 3e variation en changeant comme ci-deffus en même temps les 1res & 2es lettres, & ces 3 variations avec le 1er Quarré font 4 Quarrez qui font les mêmes; par conféquent il faut divifer $\overline{Pr-1}^2$ par 4.

D'où il fuit que le nombre des variations du Quarré de 3 eft 1: de 5 eft 144: de 7 eft 129600: de 9 eft 406, 425, 600: de 11 eft 3, 262, 047, 360, 000.

2°.

* *Art.* 13.

2°. *Par Indices* *. Si les lettres ne sont point repetées dans les Diagonales, la variation des nombres est $\frac{Pr^2}{8}$, & si r est un nombre premier, la variation des deux Indices qui sont devant la 2e bande horizontale sont $\overline{r-3} \times \overline{r-4} = rr - 7r + 12$: & la variation totale des lettres par Indices est $\frac{Pr^2}{8} \times \overline{r-3} \times \overline{r-4}$. Ainsi la variation de 5 est 3600: de 7 est 38, 102, 400: de 11 est 546, 519, 366, 328, 320, 000.

Si r n'est pas un nombre premier, il faut examiner d'abord les variations des deux Indices qui sont après o. o. † dans lesquelles 1°. il faut exclure les cas où ces deux Indices ou leur difference sont aliquotes ou aliquantes de r. 2°. Dans les autres cas il faut examiner en détail les variations qui arrivent lorsque $n+1$ & $n-1$ d'une espece de lettre, & $n+1$ & $n-1$ de l'autre espece, sont séparement ou deux à deux, ou 3 à 3 aliquotes ou aliquantes de r, ensuite il faut prendre la somme des variations de tous ces cas.

3°. *Par la méthode mixte* ‡. Si r est un nombre premier, le nombre des variations est $\frac{Pr \times \overline{Pr-1}}{4} \times \overline{r-3}$. Ainsi le nombre des variations du Quarré de 5 est 1440: de 7 est 362, 880: de 11 est 289, 700, 167, 680, 000.

4°. *Par la Méthode désordonnée* *. Il faut parcourir par détail toutes les manieres dont les lettres ayant leurs valeurs reglées peuvent être

* *art.* 14. † *art.* 15. ‡ *art.* 16. * *art.* 17.

être rangées pour permettre que les Indices soient rangées d'une maniere desordonnée, l'on trouvera ces cas par l'art. 23, ou plûtôt en se servant des lettres analogues.

5°. *Par Analogie* *. Il faut appeller q le nombre des lettres minuscules, de sorte que dans les Quarrés pairs $q = \frac{1}{2} r$, & dans les impairs $q = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2}$.

Les variations des nombres de chaque Quarré par analogie est $Pq^2 \times 2.^{2q-3}$. Ainsi dans le Quarré de 3 le nombre des variations des nombres est 1: de 4 & de 5 est 8: de 6 & de 7 est 288: de 8 & de 9 est 18432: de 10 & de 11 est 1843200.

Il faut ensuite examiner les variations de méthodes par bandes correspondantes, par bandes non correspondantes, par bandes mixtes, par bandes interrompuës, par les enceintes, & par les quarrés composez faits par analogie; prendre la somme de toutes les combinaisons de chaque maniere, & multiplier cette somme par $Pq^2 \times 2.^{2q-3}$.

6°. *Par les autres manieres* ‡. Le nombre des variations par les autres maniéres est égal à la somme des combinaisons & des permutations qu'il faut faire en détail.

86. Pour trouver le nombre de toutes les variations possibles d'un Quarré proposé, il faut chercher en détail les variations de chaque méthode ou maniere de faire ce Quarré (en excluant les manieres dont les variations retombent dans les autres) & prendre la somme de toutes ces variations.

XIII.

* *art.* 27. ‡ *Sect. IX.*

XIII. *Raport des Méthodes qui ont été données jusqu'à present avec les nôtres.*

87. Tous les Auteurs conviennent de se servir des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 &c. pour en former des Quarrés magiques; je crois que M. *de la Hire* est le premier qui ait employé d'autres nombres; je détermine tous ceux qui peuvent servir à la construction de ces Quarrés.

82. Pour connoître à laquelle de nos Méthodes se rapporte un Quarré magique en nombres construit selon la méthode de quelque Auteur, comme le Quarré de 4 qui est le 1er de M. *Frenicle*. 1°. Sous les 2es lettres *p q Q P* mettez les nombres 1234 *. Sous les 1res lettres mettez les nombres 0. 4. 8. 12. 2°. En la place des nombres du 1er quarré, mettez les lettres qui leur sont égales par la converse de l'art. 18. Vous aurez un Quarré en lettres; & par leur disposition vous connoîtrez qu'il se rapporte à nôtre méthode par analogie & par bandes qui sont en partie continuës & en partie interrompuës.

1	13	8	12
16	4	9	5
11	7	14	2
6	10	3	15

a 0	*b* 4	*B* 8	*A* 12
ap	*Ap*	*bP*	*BP*
aP	*aP*	*Bp*	*bp*
BQ	*bQ*	*Aq*	*ap*
bq	*Bq*	*aQ*	*AQ*
p 1	*q* 2	*Q* 3	*P* 4

83. C'est ainsi que l'on connoîtra que la 1re ma-

* art. 25.

maniere de *Manuel Moscopule* rapportée par M. *de la Hire* * est par les Indices, & la 2e par les Diagonales, aussi-bien que les Quarrés de M. *Bachet*, dans ses *Problêmes plaisans* imprimez en 1624.

88. Les Quarrés de M. *Frenicle* imprimez dans les Ouvrages de Mathematique & de Physique de Mrs de l'Academie des Sciences page 484, se raportent à nos differentes Méthodes.

89. L'Auteur des *Nouveaux Elemens de Geometrie*, & le P. *Prestet* Prêtre de l'Oratoire dans ses *Nouveaux Elemens de Mathematique*, font un Quarré de 3 & un autre de 4 autour desquels ils mettent des enceintes repetées à bande unique qui se raportent à nos Méthodes art. 74, 75 & 76.

90. Le Quarré magique que M. *de la Loubere* Envoïé Extraordinaire auprès du Roi de *Siam*, a mis dans la Relation de son Voyage fait en 1687, est par la méthode mixte art. 16.

91. M. *Poignard*, grand Chanoine de *Bruxelles*, a fait imprimer en 1704 un *Traité des Quarrés sublimes*, dans lesquels, 1°. Ses Quarrés par progression repetées se rapportent aux nôtres, dont on a ôté les 1res lettres. 2°. Ses Quarrés impairs sont formez par la methode mixte selon l'art. 16. 3°. Ses premiers Quarrés pairement pairs sont par bandes correspondantes, dans lesquelles les directes sont par homologie selon l'art. 58. & alternativement majuscules & minuscules. 4°. Ses Quarrés impairement pairs (qu'il appelle pairement impairs) sont un cas de l'art. 61. 5°. Ses variations

* *Mem. de l'Acad.* 1705. pp. 212. 213.

riations sont des cas de nos variations de nombres art. 78.

92. M. *de la Hire* a donné ses nouvelles constructions & considerations sur les Quarrés magiques, avec les démonstrations dans les Memoires de l'Academie des Sciences de l'année 1705. ce qu'il a fait d'une maniere plus generale que ceux qui l'ont précedé. Il prend pour principe deux Quarrés primitifs, dont chaque nombre de l'un étant ajoûté à chaque nombre de l'autre qui lui répond, forment un Quarré magique parfait. Ces Quarrés primitifs sont formez plus generalement par nos 1res lettres & par nos 2des lettres, qui satisfont plus simplement & plus generalement à toutes les difficultez qu'il est obligé de lever par des propositions particulieres.

Dans sa 1re partie qui commence à la page 167. il traite des Quarrés impairs dont les constructions sont renfermées sous celle des indices *, qui comprend les constructions par diagonales, & par la methode mixte, dans lesquelles il a senti la difficulté des nombres repetez dans les diagonales, dont j'ai donné la Solution dans la Section III.

Les Quarrés pairs dont il traite dans la 2de partie page 480. sont des cas particuliers de nos Sections VI. & VII. qui s'étendent aussi aux constructions des Quarrés impairs d'une maniere nouvelle. Enfin ses Enceintes sont comprises dans nôtre Section X. dans laquelle nos Croix & nos Chassis donnent lieu à de nouvelles manieres de varier les Quarrés magiques.

93. Pour

* *art.* 13. 14. & 16.

93. Pour ne rien omettre j'ajoûterai que les principes que j'établis suffisent pour la construction de tous les Quarrés & de tous les Cubes magiques, & les methodes que j'ai données sont entierement détaillées pour les Quarrés impairs par lettres generales, pour les Quarrés pairs & impairs par bandes continuës & pour une partie des variations, le temps ne m'a pas permis d'entrer dans le détail du reste; il est bon de laisser à d'autres le plaisir d'achever cette matiere.



OBSERVATIONS

De la quantité d'eau qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année 1709, avec l'état du Thermometre & du Barometre.

PAR M. DE LA HIRE.

*VOICI la continuation des observations sur la pluie, sur le Thermometre & sur le Barometre, que j'ai faites comme les années précedentes dans le même lieu & avec les mêmes Instrumens. Je commencerai donc par la quantité d'eau qui est tombée, soit en pluïe, soit en nége fonduë.

En Janv.	22 lig. $\frac{3}{8}$	Mai	32 lig.	Sept.	29 lig. $\frac{2}{8}$
Fev.	13 $\frac{7}{8}$	Juin	45 $\frac{4}{8}$	Octob.	17 $\frac{5}{8}$
Mars	20 $\frac{2}{8}$	Juill.	18 $\frac{2}{8}$	Nov.	1 $\frac{5}{8}$
Avril	37 $\frac{6}{8}$	Août	10 $\frac{7}{8}$	Dec.	11 $\frac{6}{8}$

Somme de l'eau de toute l'année 1709 est 261 lignes

* 1710. 8. Janvier.

lignes $\frac{1}{8}$ ou 21 pouces 9 lignes $\frac{1}{8}$, ce qui eſt un peu plus que les années moyennes qu'on a déterminées à 19 pouces.

On voit par ces obſervations que les trois mois d'Avril, Mai & Juin ont donné preſqu'autant d'eau que les neuf autres mois de l'année, & c'eſt ce qui arrive ordinairement dans les mois de Juin, Juillet & Août; & c'eſt ce qui a fait que les Mars qu'on a ſemés fort tard ont raporté beaucoup. La grande quantité de nége qui eſt tombée pendant l'hiver, a peut-être contribué à la fertilité de la terre, & ſi le froment & le ſegle n'euſſent pas été gelés juſque dans la racine, cette année auroit été fort abondante.

Le Thermometre dont je me ſers pour meſurer la chaleur & le froid, eſt le même que j'ai conſervé depuis 40 ans environ; mais comme il a été placé à differentes expoſitions du ciel, hormis depuis 15 années, on ne peut pas faire une comparaiſon tres-exacte des premieres obſervations avec les dernieres. Cependant toutes ces obſervations étant toûjours faites à la pointe du jour où l'air eſt le plus froid, on en peut conclure aſſez exactement tout ce qu'on peut connoître par le moyen de cet Inſtrument. Je remarquerai ſeulement que le jugement que nous faiſons ordinairement du froid dépend de pluſieurs circonſtances particulieres, comme du vent, de l'humidité de l'air, de la chaleur ou du froid des jours précedents, de l'expoſition des lieux où l'on eſt, & de la conſtitution des corps, ce qui peut l'alterer conſiderablement; c'eſt-pourquoi il ſera toûjours plus ſûr de s'en raporter au Thermometre.

Le

Le froid du commencement de cette année a été excessif avec beaucoup de nége, car mon Thermometre est descendu jusqu'à 5 parties le 13 & le 14 de Janvier, & les jours suivans étant un peu remonté, il revint à 6 parties le 20 & le 21 à $5\frac{1}{4}$, mais ensuite le froid diminua peu à peu. Ce grand froid a été fort sensible, car le 4 de ce mois de Janvier ce Thermometre étoit à 42 parties qui est un état fort proche du moyen que j'ai déterminé à 48, le 6 il vint à 30, le 7 à 22, le 10 à 9, & enfin le 13 à 5; c'est sans doute ce changement subit qui a paru si extraordinaire, & ce qui est encore plus surprenant c'est que ce grand froid est survenu sans aucun vent considerable, ou il n'y en avoit qu'un très-foible vers le Sud, & lorsque le vent augmentoit & tournoit vers le Nord, le froid diminuoit. Ce vent de Sud si froid nous devoit marquer ce qui est effectivement arrivé dans les païs meridionaux à nôtre égard, où la mer s'est gelée en quelques lieux de la Côte de *Provence*, & où la plûpart des arbres fruitiers sont morts aussi-bien que dans ce païs-ci.

Je n'avois point encore observé que ce Thermometre fût descendu aussi bas que cette année. Je trouve seulement dans mes Registres que le 6 Fevrier 1695 le Thermometre étoit descendu à 7 parties dans le même lieu où il est à present; & le froid de cet hiver-là qui avoit commencé en 1694, a été regardé comme un des plus grands qu'il ait fait il y a long-temps, mais on voit qu'il n'est pas encore à comparer à celui de cette année. J'ai encore observé quelquefois ce Thermometre à 13 parties, mais assez rarement.

L'hi-

L'hiver de cette année a duré fort longtemps, car le 13 Mars il geloit encore très-fort, le Thermometre étant à 24 parties, & la gelée commençant quand il est à 32.

On trouve dans l'*Histoire de France* de *Mezerai* que l'hiver de l'année de 1608 fut très-long & très-rude, & que la plûpart des jeunes arbres furent gelés ; cependant cette année-là fut fort abondante, quoiqu'on l'appelle l'année du grand hiver : mais par la comparaison de l'abondance & de la perte des arbres, l'hiver dernier doit l'avoir surpassé.

Le Thermometre a été au plus haut à 63 parties le 11 Août à 4 heures ½ du matin, & après midi vers les 3 heures à 75 parties. Dans l'état moyen il est à 48 dans le fond des caves de l'Observatoire. La chaleur de cette année a été bien moindre que celle de 1707, où le Thermometre étoit monté à près de 70 parties le 21 Juillet au matin, & après midi à 82, qui est le plus haut où il ait été dans ce païs-ci, sans être exposé au Soleil.

Pour comparer les observations de mon Thermometre avec celles qu'on auroit faites sur celui de M. *Amontons* dont il y en a eu beaucoup de distribués dans plusieurs endroits, j'en ai placé un qu'il avoit fait avec grand soin à côté de celui dont je me sers ordinairement ; mais comme il me servoit à quelques observations particulieres, je ne l'ai mis proche du mien qu'au mois de Mai dernier. On sait que tous ces Thermometres de M. *Amontons* ont leur 54e degré ou 54 pouces qui marque la temperature de l'air des caves de l'Observatoire, comme dans le mien le 48e degré. J'ai donc observé que lorsque le Thermo-

mometre de M. *Amontons* étoit à 55 pouces 8 lignes, le mien étoit à 63 parties, enforte que 15 parties du mien répondoient à 20 lignes de celui de M. *Amontons*. Mais lorfque le mien a marqué dans le mois de Decembre dernier 28 parties, celui de M. *Amontons* marquoit 51 pouces 6 lignes, ce qui donne dans le mien 20 parties au-deffous de l'état moyen & dans celui de M. *Amontons* 30 parties, ce qui eft un raport bien different du premier, & qui peut être caufé par l'inégalité de l'interieur des tuyaux; & comme celui de M. *Amontons* eft fort petit & le mien mediocre, je croirois que l'inégalité pourroit être plus grande dans celui de M. *Amontons* que dans le mien. Cependant on peut connoître par-là qu'on ne fauroit avoir rien de fort exact dans la comparaifon des Thermometres en differens païs & pour un même temps, à moins que les Thermometres n'ayent été rectifiés l'un fur l'autre dans toutes fortes de degrés de chaleur & de froid, & je crois qu'il ne fera pas poffible d'en trouver deux égaux, c'eft-à-dire dont des degrés égaux dans la divifion répondent à des degrés égaux de chaleur ou de froid.

Pour ce qui eft de mon Barometre, il eft toûjours placé à la hauteur de la grande Sale de l'Obfervatoire; je l'ai trouvé au plus haut à 28 pouces 3 lignes $\frac{1}{2}$ le 19 Janvier avec calme & ciel ferein, ce qui étoit vers le temps du plus grand froid; & le 31 Decembre il étoit à 28 pouces 3 lignes $\frac{1}{4}$ avec un très gros brouillard & calme. Il a été auffi plufieurs fois au-delà des 28 pouces avec des vents differens, mais qui participoient plûtôt

du

du Nord que du Sud, & toûjours sans pluïe. J'ai observé ce Barometre au plus bas à 26 pouces 7 lignes ½ avec vent fort Sud & pluïe mediocre le 16 Decembre. La difference entre la plus grande & la moindre hauteur du Barometre, a donc été de 1 pouce 8 lignes, qui est un peu plus que la difference mediocre qu'on observe ici & qui est de 1 pouce 6 lignes. Cet instrument a été assez exact à prédire la pluïe & le beau temps suivant le sentiment commun.

J'ai observé la Déclinaison de l'Aiman avec la même aiguille de 8 pouces de longueur & dans le même lieu où j'ai accoûtumé, & comme je l'ai marqué dans les Memoires des années précedentes. Le 24 Decembre dernier j'ai trouvé cette déclinaison de 10 degrés 30 minutes vers le Couchant. D'où l'on connoît que cette déclinaison augmente toûjours chaque année à peu près de la même quantité.



COMPARAISON

Des Observations que nous avons faites ici à l'Observatoire sur la Pluie & les Vents, avec celles que Monsieur le Marquis de Pontbriand *a faites dans son Château près S.* Malo *pendant l'année* 1709.

PAR M. DE LA HIRE.

* IL y a déja quelques années que M. *du Torar* nous communique les Observations que

* 1710. 1. Mars.

que Monſieur le Marquis de *Pont-Briand* fait chez lui de la même maniere que je les fais ici ſur la Pluïe. Il a trouvé qu'il eſt tombé en nége fonduë & en eau aux Mois de

Janv.	33 l. $\frac{1}{4}$	Avril	30 l. $\frac{1}{2}$	Juill.	18 l. $\frac{1}{4}$	Oct.	14 l.
Fev.	17 $\frac{1}{2}$	Mai	26 $\frac{1}{4}$	Août	5 $\frac{1}{4}$	Nov.	3 $\frac{3}{4}$
Mars	30 $\frac{1}{4}$	Juin	23 $\frac{3}{4}$	Sept.	5	Dec.	17 $\frac{1}{4}$

& pendant toute l'année 225 lignes ou 18 pouces 9 lignes.

Cette quantité d'eau eſt moindre que celle que nous avons trouvée ici, & qui a été de 21 pouces 9 lignes, ce qui eſt extraordinaire; car nous avions remarqué les années précedentes qu'il pleut beaucoup moins ici que dans ce païs-là qui eſt ſur le bord de la mer.

On voit par le Memoire de M. de *Pont-Briand* que la forte gelée a commencé quelques jours plûtôt dans ce lieu-là qu'à *Paris*; mais il y a negé dans le même temps avec un vent N.O. A *Paris* il ne faiſoit pas preſque de vent & il étoit vers le S.

Le mois de Janvier lui a donné 33 lignes $\frac{1}{4}$ d'eau & à *Paris* ſeulement 22 lig. $\frac{1}{2}$. Le Memoire porte que la forte gelée avoit diminué à la fin de Janvier & recommencé en Fevrier, & que la nuit du 23 au 24 elle fut auſſi forte que depuis le 6 juſqu'au 18 de Janvier. A *Paris* elle recommença auſſi en Fevrier à peu près dans le même temps, mais elle fut bien moindre qu'en Janvier.

Il ajoûte auſſi que les vents étoient très-violens de N.O; mais à *Paris* il n'en faiſoit qu'un très foible vers le S.

Il dit enfin que le froid n'a pas été ſi grand chez lui que dans le milieu de la *Bretagne*; ce qui paroît devoir être ainſi à cauſe de la proxi-

proximité de la mer dont les vapeurs humides absorbent une partie du grand froid, comme toutes les experiences nous le font connoître; car pendant la forte gelée l'air est extrêmement sec, & aussi-tôt qu'il devient humide il dégêle.

Je remarquerai encore ici que j'ai vû en 1679 dans le Jardin du Roi à *Brest*, des Ananas très-beaux en pleine terre, & je croi qu'ils y avoient passé l'hyver; peut-être aussi que le terrein maritime contribuoit à cela, car je ne croi pas qu'on puisse les élever dans ce païs-ci.

En Juin il n'y eut au *Pont-Briand* que 23 lignes $\frac{3}{4}$ d'eau & à *Paris* 45 lignes $\frac{1}{2}$: aussi à *Paris* le 25 & 26 il plut 9 lignes, & au *Pont-Briand* 2 $\frac{1}{2}$ seulement.

En Août nous avons eu un orage la nuit du 11 au 12 avec 7 lignes $\frac{1}{2}$ d'eau, & il n'y a rien eu au *Pont-Briand*.

En Septembre nous avons eu encore ici un orage la nuit du 13 au 14 qui a donné 9 lignes d'eau & rien au *Pont-Briand*. De plus il n'est tombé pendant tout ce mois au *Pont-Briand* que 5 lignes d'eau, & à *Paris* plus de 29 lignes.

En Novembre, au *Pont-Briand* la quantité d'eau a été de 3 lig. $\frac{1}{4}$, & à *Paris* un peu moins de 1 lig. $\frac{1}{2}$.

En Decembre nous avons eu ici pendant la nuit du 15 au 16 une espece de houragan.

En general tous les vents de l'année sont un peu differens au *Pont-Briand* & à *Paris*, & assez souvent ils tiennent plus du Nord au *Pont-Briand* qu'à *Paris*; ce qui pourroit être causé par la direction de la *Manche*, & par

toutes les Côtes de l'*Allemagne*, du *Danemarc* & de la *Norvege*, & principalement quand les vents viennent entre le N. & le O.



COMPARAISON

De mes Observations avec celles de M. Scheuchzer *sur la Pluïe & sur la Constitution de l'air pendant l'année* 1709. *à* Zurich *en* Suisse.

PAR M. DE LA HIRE.

* M. *Scheuchzer* m'a envoyé les Observations qu'il a faites sur la quantité d'eau de pluïe qui est tombée à *Zurich* en *Suisse* où il a demeuré pendant l'année 1709; d'où l'on voit que les premiers six mois lui ont donné 172½ lignes d'eau mesure de *Paris*, & les derniers 208 lignes, ce qui fait en tout 390½ lignes, ou 32 pouces 6 lignes ½; mais à *Paris* il n'en est tombé que 21 pouces 9 lignes & ⅛: il ajoûte que cette année lui a fourni 1 pouce 10½ lignes plus que la precedente.

On connoît par la comparaison de ces observations qu'il pleut beaucoup plus en *Suisse* qu'à *Paris*.

J'avois déja remarqué par les observations de la pluïe faites à *Lyon*, qu'il y pleuvoit bien plus qu'à *Paris*, & j'en avois attribué la cause aux montagnes de *Suisse* qui n'en sont pas fort éloignées; & c'est ce qui se trouve

* 1710. 24. Mai.

trouve confirmé par ces dernieres observations. On ne peut pas douter que les vapeurs qui sont soûtenuës en l'air dans un païs plat & qui se trouvent beaucoup au dessous des hautes montagnes, lorsqu'elles viennent à les rencontrer, s'y arrêtent & s'y condensent en forme de nége dans un temps froid, ce qui doit produire beaucoup plus d'eau, étant poussées par les vents contre ces rochers, que dans les lieux où elles ne s'arrêtent point; & si l'air est assez chaud pour empêcher ces vapeurs de se geler, elles s'y amassent ensemble & y tombent en pluïe, outre que les néges qui se fondent alors & dont une partie s'éleve aussi en vapeurs, y cause des pluïes très-abondantes.

Pour ce qui est des observations de M. *Scheuchzer* sur les augmentations ou diminutions de la riviere de la *Limage*, elles suivent naturellement celles de la pluïe & de la fonte des néges dans les saisons où cela arrive.

Il ajoûte encore ses observations sur le Barometre & sur le Thermometre, où il marque que la plus grande hauteur du mercure du Barometre a été de 26 pouces 10 lignes ½ le 19 de Janvier, & la plus basse de 26 pouces le 20 & le 28 Fevrier; & par conséquent la difference n'a été que de 10 lignes ½ comme dans l'année 1708.

Ce qu'il y a de considerable ici, c'est que mon Barometre a été aussi au plus haut le 19 Janvier à 28 pouces 3 lignes ½ avec calme, qui est le même jour où il a été au plus haut à *Zurich*, & que la difference est de 17 lignes; & si l'on vouloit conclure delà la

difference des hauteurs des lieux où ces observations ont été faites, en posant pour une ligne de cette difference 12 toises 3 piés, comme je l'ai determiné dans ces quartiers-ci, on diroit que le lieu où M. *Scheuchzer* a observé, est plus haut que le milieu de l'Observatoire où est mon Barometre, de 212 toises $\frac{1}{2}$. Mais les differentes hauteurs ausquelles nous voyons qu'un même mercure se soûtient dans differens tuyaux, quoique dans un même lieu, nous pourroient laisser quelque soupçon de la veritable difference de hauteur de ces lieux.

Pour ce qui est de la moindre hauteur du Barometre de M. *Scheuchzer* qui étoit à 26 pouces le 20 & 28 Fevrier, elle ne s'accorde pas tout à fait avec les miennes dans les mêmes jours; car le 28 Fevrier j'avois 27 pouc. 2 lign. avec un vent mediocre, & par consequent la difference de nos Barometres sera ce jour-là de 14 lignes au lieu de 15 que j'ai trouvé dans la plus grande hauteur: peut-être que l'heure de nos observations n'est pas la même & que le vent peut aussi y apporter du changement; M. *Scheuchzer* ne marque pas ces circonstances. Mais le 20 Fevrier le mien étoit à 26 pouces. 10 lignes avec un vent fort au lever du Soleil: ainsi la difference ne seroit que de 10 lignes, au lieu de 14 ou 15 par les autres observations, & le mien seroit plus bas qu'il ne devroit de 4 à 5 lignes. Ce n'est pas aussi dans ces jours-là que mon Barometre a été au plus bas, car je l'ai observé le 16 Decembre à 26 pouces $7\frac{1}{2}$ avec un vent fort de Sud; ainsi le mercure du Barometre auroit des changemens bien plus grands à *Paris* qu'à *Zurich* en *Suisse*. Il

Il me ſemble qu'on pourroit attribuer ces ſortes d'inegalités à des cauſes particulieres ; car il n'eſt pas vraiſemblable qu'elles puiſſent venir des hauteurs differentes de l'atmoſphere, ce qui en fait la peſanteur, dans des lieux qui ſont peu éloignés les uns des autres. Ne pourroit-on pas croire que lorſqu'il fait un grand vent & qu'il y a beaucoup de nuages, & principalement dans les montagnes comme en *Suiſſe*, le vent comprimeroit & condenſeroit l'air renfermé entre la ſurface de la terre, les rochers & ces nuages, enſorte qu'il feroit alors une bien plus forte impreſſion ſur le mercure du Barometre, que s'il n'y avoit point de vent ? Mais comme il eſt rare que dans ces ſortes de lieux où il y a beaucoup d'eau, il n'y ait ni vent ni nuages, auſſi le mercure du Barometre s'y ſoûtiendra-t-il par ces cauſes, preſque toûjours plus haut que dans les plaines.

Je ne puis rien dire des obſervations du Thermometre de M. *Scheuchzer*, quoique j'en aye un de M. *Amontons* ſemblable au ſien, qui eſt une groſſe phiole de verre avec un peu de mercure, lequel remonte dans un petit tuyau qui eſt ouvert par le haut, comme il les avoit conſtruits pour faire l'experience de l'eau bouillante ; mais je ne m'en ſers pas à cauſe qu'il eſt ſujet aux differents changemens de la peſanteur de l'air.



USAGE

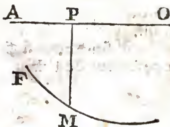
D'une Intégrale donnée par M. le Marquis de l'Hôpital *dans les Mem. de* 1700. *pag.* 15.

Avec la Solution de quelques autres questions approchantes de la sienne.

PAR M. VARIGNON.

* JE ne prétends presque rien donner ici de moi, mais principalement faire observer que la premiere des deux Intégrales par lesquelles M. le Marquis de *l'Hôpital* est arrivé à la solution du Problême proposé dans le second Tome des Supplémens des *Actes de Leipsik*, pag. 291. par M. (*Jean*) *Bernoulli* alors Professeur à *Groningue*, & presentement Professeur à *Basle*, peut encore servir à la solution de plusieurs Problêmes touchant les pressions des Courbes le long desquelles tombent des poids qui les compriment tant de la part de leurs forces centrifuges que de celle de leurs pesanteurs.

Ce Problême de M. *Bernoulli* consistoit à *déterminer dans un plan vertical la Courbe* FM, *le long de laquelle un corps tombant librement du point* A *en vertu de sa seule pesanteur supposée constante, la comprimeroit perpendiculairement par tout d'une force égale à cette pesanteur.*



M.

* 1710. 21. Janvier.

M. le Marquis de l'*Hôpital* après avoir appellé y, les ordonnées verticales PM de cette Courbe ; x, les abscisses AP correspondantes depuis l'origine A vers O sur l'horizontale AO ; dv, les élemens de cette Courbe, qu'il suppose constans ; & a, la pesanteur du poids qui la doit comprimer ; a trouvé $\frac{2ayddx}{dvdy}$ pour l'expression générale de la pression perpendiculaire causée par la force centrifuge de ce poids, & $\frac{adx}{dv}$ pour celle d'une pareille pression causée par la seule pesanteur de ce même poids ; ce qui lui a donné $\frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv}$ pour l'expression générale de la force totale avec laquelle ce poids doit comprimer perpendiculairement cette Courbe en chaque point M, tant de la part de sa force centrifuge que de celle de sa pesanteur, sa force centrifuge pressant ainsi cette Courbe de la force $\frac{2ayddx}{dvdy}$, & sa pesanteur la pressant de la force $\frac{adx}{dv}$. Delà il lui est venu, suivant la condition du Problême, $a = \frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv} = \frac{2ayddx + adxdy}{dvdy}$; d'où il a tiré $2yddx + dxdy = dydv$; & ensuite (en divisant le tout par $2\sqrt{y}$) $\frac{2yddx + dxdy}{2\sqrt{y}} = \frac{dydv}{2\sqrt{y}}$, que dv. (*hyp.*) constante lui a permis d'intégrer en $dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y}$

 $- dv\sqrt{a}$

$-dv\sqrt{a}$. C'eſt ce tour d'intégration, & même le premier membre $dx\sqrt{y}$ de cette intégrale, que je dis ne ſervir pas ſeulement à la ſolution du Problême précédent, mais encore à celle de pluſieurs autres de cette nature: par exemple, à celle de celui-ci, &c.

PROBLEME I.

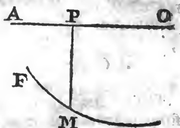
Trouver la nature de la Courbe FM *qu'un poids tombant comme ci-deſſus, preſſeroit perpendiculairement en chaque point* M *en raiſon des puiſſances* n *des hauteurs* PM *de ſa chute faite librement du point* A *le long de cette Courbe.*

SOLUTION.

Les noms demeurant les mêmes que ci-deſſus, ayant encore ici $\frac{2ayddx + adxdy}{dvdy}$ pour l'expreſſion générale de la force totale avec laquelle le poids qu'on ſuppoſe tomber de *A* le long de la Courbe *FM*, la doit preſſer perpendiculairement en chaque point *M*; il eſt viſible que l'on aura ici $\frac{2ayddx + adxdy}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$ dont b, c, ſont des indéterminées conſtantes quelconques; & delà $2ac^nyddx + ac^ndydx = by^ndydv$; & enſuite (en diviſant le tout par $2\sqrt{y}$, comme M. le Marquis de *l'Hôpital* a fait dans ſa ſolution du Problême de M. *Bernoulli*) $ac^n \times \frac{2yddx + dydx}{2\sqrt{y}} = bdv \times \frac{y^ndy}{2\sqrt{y}} = \frac{bdv}{2}$

$\times$

$\times y^{n-\frac{1}{2}} dy$, dont l'intégrale eſt $ac^n \times dx\sqrt{y} = bdv \times \frac{y^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1}$ en prenant dv conſtante, ou $dx\sqrt{y} = \frac{bdv}{ac^n} \times \frac{y^n\sqrt{y}}{2n+1}$, laquelle intégrale on voit avoir le même premier membre $dx\sqrt{y}$ que la précédente de M. le Marquis de *l'Hôpital*, & trouvé de la même maniere que par lui. Donc $\overline{2n+1} \times ac^n dx = by^n dv$, ou $\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} dx^2 = bby^{2n} dv^2 = bby^{2n} dx^2 + byy^{2n} dy^2$, ou bien auſſi $\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} dx^2 - bby^{2n} dx^2 = bby^{2n} dy^2$; d'où reſulte $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} - bby^{2n}}}$ pour l'équation de la Courbe requiſe, laquelle équation ſe change en $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ en faiſant $b = a = c$: on n'y a introduit les indéterminées conſtantes b, c, que pour la rendre ſuſceptible de plus de varieté ſans ſortir des conditions du Problême.



Voici quelques Corollaires de cette derniere équation $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ leſquels ſuffiront pour faire voir l'uſage promis de l'intégrale $dx\sqrt{y}$ que nous venons d'emprunter de M. le Marquis de *l'Hôpital*.

COROLLAIRE I.

Soit, si l'on veut, $n=2$, c'est-à-dire les pressions précédentes de la Courbe *FM* en raison des quarrés des haureurs *PM* (y) des chutes du poids, faites du point *A* le long de cette Courbe, ou (suivant l'hypothêse de *Galilée* sur la pesanteur) en raison des quatriémes puissances des vitesses de ce poids en chaque point *M*; l'équation précédente $dx =$ $= \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ se changera ici en $dx =$ $= \frac{yydy}{\sqrt{25a^4 - y^4}}$, qui est celle que M. (*Jacques*) *Bernoulli* a assignée à la Courbe élastique dans les *Actes de Leipsik* de 1694. pag. 272. & de 1695. pag. 538. dans lesquels a signifie la même chose qu'ici $a\sqrt{5}$. Ce qui fait voir que cette Courbe élastique seroit celle de ce cas-ci.

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose $n=1$, c'est-à-dire les pressions précédentes de la Courbe cherchée, en raison des hauteurs des chutes du poids qui la doit comprimer, ou (suivant l'hypothêse de *Galilée* sur la pesanteur) en raison des quarrés des vitesses de ce poids le long de cette Courbe; la seconde équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$, se changera ici en $dx = \frac{ydy}{\sqrt{9aa - yy}}$, dont l'intégrale est $x = -$ $\sqrt{}$

$\sqrt{9aa-yy}+q$: de forte que le cas de $x=0$ en *A*, rendant pareillement en ce point $y=0$, & réduisant ainsi cette intégrale à $0=-3a+q$, d'où résulte $q=3a$; cette intégrale complette doit être $x=3a-\sqrt{9aa-yy}$, ou $\sqrt{9aa-yy}=3a-x$, dont le quarré $9aa-yy=9aa-6ax+xx$, donne $yy=6ax-xx$, qui est une équation au cercle dont le rayon est $=3a$, & qui fait voir que ce cercle seroit la Courbe requise en ce cas-ci. M. *Saurin* l'a aussi trouvé, & en a rendu pareillement gloire à M. le Marquis de *l'Hôpital*.

COROLLAIRE III.

Si presentement on suppose $n=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, les pressions précédentes de la Courbe *FM*, en raison des racines quarrées des hauteurs des chutes du poids comprimant, ou (suivant l'hypothêse de *Galilée* sur la pesanteur) en raison des vitesses de ce poids le long de cette Courbe; la précédente équation générale $dx=\frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n}-y^{2n}}}$, se changera tout d'un coup en $dx=\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{4a-y}}$ qui est une équation à la Cycloïde pour ce cas-ci, dont M. *Parent* a donné la Synthese dans les Mem. de 1708. pag. 288.

M. *Parent* a eu raison de dire (*page* 293.) que la *Methode* ou l'Analyse de ce cas particulier des pressions en raison des vitesses, ou en raison réciproque des instans employés à parcourir des élemens constans de la Courbe

cherchée, *est maintenant dans les mains de tout le monde.* Car M. le Marquis de *l'Hôpital* ayant donné $\frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv}$ pour l'expression générale de ces pressions totales perpendiculaires à la Courbe cherchée, ce cas de telles pressions en raison des vitesses $\sqrt{ay}$ du corps comprimant en tombant le long de cette Courbe, donne tout d'un coup $\sqrt{ay} = \frac{2ayddx}{dvdy} + \frac{adx}{dv}$ $= \frac{2ayddx + adxdy}{dvdy}$, ou $dvdy\sqrt{y} = 2yddx\sqrt{a} + dxdy$ $\sqrt{a}$, ou bien aussi $\frac{dvdy}{2} = \frac{2yddx + dxdy}{2\sqrt{y}} \times \sqrt{a}$, dont l'intégrale (à cause de dv constante) est $\frac{ydv}{2} = dx\sqrt{y} \times \sqrt{a} = dx\sqrt{ay}$, ou $2\,dx\sqrt{ay}$ $= ydv$; & son quarré $4aydx^2 = yydv^2 = yydx^2$ $+ yydy^2$, lequel donnant $4adx^2 - ydx^2 = ydy^2$, donne aussi $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{4a-y}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée *FM*, laquelle on voit être encore une Cycloïde ordinaire, & la même que la précedente.

COROLLAIRE IV.

Si l'on suppose $n = -1$, c'est-à-dire, les pressions de la Courbe *FM* en raison réciproque des hauteurs *PM*, ou des quarrés des vitesses du poids en chaque point *M*; l'équation $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ se changera en

dx

$$dx = \frac{ldy}{y\sqrt{\frac{1}{aa} - \frac{1}{yy}}} = \frac{ady}{\sqrt{yy-aa}} = \frac{2}{a} \times \frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}},$$

dont l'intégrale est $x = \frac{2}{a} \times \int \frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$ dépendante de la quadrature de l'hyperbole.

Quelques autres valeurs qu'on donne à n, *on trouvera de même les Courbes susceptibles des pressions qui y conviennent, ou bien leur impossibilité, supposé les intégrations necessaires.*

REMARQUE.

I. Si entre les valeurs de n on suppose $n = 0$, & conséquemment $y^n = y^0 = 1$, c'est-à-dire, les pressions de la Courbe par tout les mêmes, la seconde équation générale $dx = \frac{y^n dv}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$ de la Solution, se réduira à $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-1}} = \frac{dy}{0}$; ce qui fait voir qu'en ce cas la Courbe *FM* dégénereroit en une ligne droite horizontale dont la charge ou la pression, toûjours la même, seroit seulement égale à la pesanteur entiere du poids alors toute employée à cette compression sans le secours d'aucune force centrifuge, ce poids y demeurant librement en repos contre la condition du Problême qui l'exige tombant en vertu de sa pesanteur.

II. Cette exclusion de la force centrifuge venant du concours des hypothêses $b = a$, $n = 0$, il faut se servir ici de la premiere équation générale $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} - bby^{2n}}}$ de la

So-

Solut. au lieu de la feconde $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n} - y^{2n}}}$; & en employant l'hypothêfe de $n = 0$ dans cette premiere équation dont a, b, c, font de differentes valeurs conftantes quelconques, elle fe réduira pour lors à $dx = \frac{bdy}{\sqrt{aa - bb}}$; ce qui, en faifant $a > b$, fait voir que la ligne cherchée *FM* feroit à la verité encore une ligne droite, mais prefentement inclinée à l'horizon d'un angle dont le finus feroit à celui de fon complément : : $dy . dx :: \sqrt{aa - bb} . b$. On voit auffi que cette ligne ne feroit encore comprimée dans ce cas-ci de $n = 0$, que par la feule pefanteur du poids fans le fecours d'aucune force centrifuge, un corps mû le long d'une ligne droite n'en ayant jamais par raport à elle.

Pour ce qui eft de l'impreffion que le poids fait ainfi par fa feule pefanteur (a) fur cette ligne droite inclinée à l'horizon fuivant l'angle qu'on lui vient de déterminer ; on la trouvera $= b$ fi l'on confidere que l'équation $dx = \frac{bdy}{\sqrt{aa - bb}}$ de cette ligne, donnant $dy = \frac{dx\sqrt{aa - bb}}{b}$, & conféquemment dv^2 $(dx^2 + dy^2) = dx^2 + \frac{aadx^2 - bbdx^2}{bb} = dx^2 + \frac{aadx^2}{bb} - dx^2 = \frac{aadx^2}{bb}$, ou $dv = \frac{adx}{b}$, la fubftitution de cette valeur de dv dans l'expreffion générale $\frac{adx}{dv}$ de l'effort de la pefanteur du poids fur ce qu'el-

qu'elle presse, doit rendre pour ici cette expression $\frac{adx}{dv} = \frac{abdx}{adx} = b$; ce qui fera voir que la force de la pression du plan ici incliné doit être à celle de l'horizontal de l'art. 1. c'est-à-dire, à la pesanteur entiere du poids comprimant l'un & l'autre :: $b.a.$

III. Le cas de $n=0$, qui en rendant ainsi droite (*art.* 1. 2.) la ligne cherchée *FM*, savoir (*art.* 1.) horizontale en faisant $b=a$, & (*art.* 2.) inclinée à l'horizon en faisant $b<a$, pressée toûjours d'une même force $=a$ par le poids en repos lorsqu'elle est horizontale, & d'une force $=b$ par le même poids en mouvement lorsqu'elle est inclinée à l'horizon suivant l'angle marqué dans l'art. 2. n'étant pressée en chaque point que de la part de la pesanteur constante, faute de force centrifuge en ce cas-ci; il est visible que la ligne droite posée de la seconde de ces deux manieres satisferoit au Problême de M. *Bernoulli*, s'il ne s'y agissoit que de pressions égales moindres que la pesanteur, & sans y requerir aucunes forces centrifuges qui y sont toûjours aneanties par $n=0$. Mais ce Problême, outre des pressions égales à la pesanteur du poids, exigeant des forces centrifuges qui avec cette pesanteur ayent aussi part à ces pressions constantes de la ligne cherchée; M. le Marquis de *l'Hopital* pour conserver ces forces centrifuges, a ajoûté la grandeur constante $-dv\sqrt{a}$ au second membre de l'intégrale immediate $dx\sqrt{y}=dv\sqrt{y}$ qui lui est venuë de la differentielle $\frac{2yddx+dydx}{2\sqrt{y}} = \frac{dydv}{2\sqrt{y}}$ résultante des

con-

conditions de ce Problême : c'est pour cela, dis-je, qu'il en a conclu $dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y} - dv\sqrt{a}$. Sans cela l'integrale immediate $dx\sqrt{y} = dv\sqrt{y}$ ne lui donnant que $dx = dv = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & conséquemment $dy = 0$, il n'auroit aussi trouvé qu'une droite horizontale pour la ligne cherchée dans son Problême.

IV. On pourroit aussi ajoûter la grandeur constante $\pm \frac{bdv}{ac^n} \times \frac{g^n\sqrt{g}}{2n+1}$ à l'intégrale $dx\sqrt{y} = \frac{bdv}{ac^n} \times \frac{y^n\sqrt{y}}{2n+1}$ trouvée dans la Solution précédente, & prendre $dx\sqrt{y} = \frac{bdv}{ac^n} \times \frac{y^n\sqrt{y}}{2n+1} \pm \frac{bdv}{ac} \times \frac{g^n\sqrt{g}}{2n+1}$ pour cette intégrale, celle-ci ayant la même differentielle que l'autre ; ce qui donnant $\overline{2n+1} \times ac^n dx\sqrt{y} = \overline{y^n\sqrt{y} \pm g^n\sqrt{g}} \times bdv$, ou (en quarrant le tout) $\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n}ydx^2 = \overline{y^n\sqrt{y} \pm g^n\sqrt{g}}^2 \times bbdv^2 = \overline{y^n\sqrt{y} \pm g^n\sqrt{g}}^2 \times \overline{bbdx^2 + bbdy^2}$, donneroit aussi $dx = \frac{by^n\sqrt{y} \pm bg^n\sqrt{g}}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n}y - \overline{by^n\sqrt{y} \pm bg^n\sqrt{g}}^2}} \times dy$ pour l'équation générale de la Courbe cherchée dans le Problême précédent : & si l'on y fait non-seulement $b = a = c$, comme dans la Solution de ce Problême, mais encore $g = a$; l'on y aura de même

$$dx = \frac{y^n\sqrt{y} \pm a^n\sqrt{a}}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times a^{2n}y - \overline{y^n\sqrt{y} \pm a^n\sqrt{a}}^2}} \times dy$$

pour l'équation requise.

II.

Il n'y a plus qu'à faire $n = 0$ dans cette derniere équation pour la changer tout d'un coup en $dx = \frac{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}{\sqrt{y - \overline{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}^2}} \times dy =$ $= \frac{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}{\sqrt{y - y \mp 2\sqrt{ay} - a}} \times dy = \frac{\sqrt{y} \pm \sqrt{a}}{\sqrt{\mp 2\sqrt{ay} - a}} \times dy$; c'est-à-dire, en $dx = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{a}}{\sqrt{-2\sqrt{ay} - a}} \times dy$, & en $dx = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}} \times dy$, dont la premiere est imaginaire, & la seconde est celle de M. le Marquis de *l'Hôpital*. Et ainsi de toutes les autres valeurs de n.

Après avoir ainsi trouvé les Courbes de pressions perpendiculaires causées tout à la fois par la force centrifuge & par la pesanteur d'un poids comprimant en raison des puissances quelconques des hauteurs de sa chute en tombant le long de ces Courbes; voici à cette occasion les Courbes de pareilles pressions causées de même en raison de ces puissances quelconques par chacune de ces forces considerées séparement; & les courbes sur lesquelles les pressions perpendiculaires d'une de ces forces seroient à celles de l'autre en raison donnée quelconque.

PROBLEME II.

Trouver une Courbe FM *dont les pressions perpendiculaires causées par la seule force centrifuge d'un poids tombant de* A *le long de cette Courbe, soient en raison des puissances* n *des hauteurs* PM *de sa chute.*

SOLU-

SOLUTION.

Les noms & la Figure demeurant ici les mêmes que dans le Problême I. l'on aura $\frac{2ayddx}{dvdy}$ pour l'expreſſion generale de ces preſſions en faiſant dv conſtante. Donc la condition de ce Problême-ci donnera $\frac{2ayddx}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$, ou $2ac^n ddx = bdv \times y^{n-1} dy$, que dv (*hyp.*) conſtante permet d'intégrer en $2ac^n dx = bdv \times \frac{y^n}{n}$, d'où réſulte $2nac^n dx = by^n dv$, de qui le quarré $4nnaac^{2n} dx^2 = bby^{2n} dv^2 = bby^{2n} dx^2 + bby^{2n} dy^2$ donnant $4nnaac^{2n} dx^2 - bby^{2n} dx^2 = bby^{2n} dy^2$, donnera $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}}$, ou (en faiſant $b = a = c$) $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

On voit que cette Courbe doit être ſemblable à celle du Prob. I. n'y ayant de difference, qu'en ce qu'au lieu de $4nn$ qui ſont ici, il y a là $\overline{2n+1}^2$: auſſi les Corollaires de ce Problême-ci donnent-ils des Courbes de même eſpece que ceux de celui-là en pareils cas, c'eſt-à-dire, à chaque valeur de n la même pour l'un & pour l'autre : par exemple,

Co-

COROLLAIRE I.

Si l'on veut $n = 2$, la seconde $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ des deux équations précedentes se changera en $dx = \frac{yydy}{\sqrt{16a^4 - y^4}}$. Ce qui fait voir que la Courbe ici cherchée sera comme dans le même cas du Corol. 1. du Prob. 1. L'Elastique assignée par M. (*Jaques*) *Bernoulli* dans les *Actes de Leipsik* de 1694. pag. 272. & de 1695. pag. 538. dans lesquels a signifie la même chose qu'ici $2a$, & que $a\sqrt{5}$ dans le Corol. 1. du Prob. 1.

COROLLAIRE II.

Si l'on suppose $n = 1$, la même équation generale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ se changera en $dx = \frac{ydy}{\sqrt{4aa - yy}}$, qui est une équation au cercle comme en pareil cas du Cor. 2. du Prob. 1.

COROLLAIRE III.

Si l'on suppose $n = \frac{1}{2}$, cette même équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ se changera en $dx = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a - y}}$. qui est une équation à la Cycloïde ordi-

ordinaire comme en pareil cas du Corol. 3. du Prob. 1.

COROLLAIRE IV.

Si l'on ſuppoſe $n = -1$, la même équation générale $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{4nna^{2n} - y^{2n}}}$ ſe changera en $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{4}{aa} - \frac{1}{yy}}} = \frac{ady}{\sqrt{4yy - aa}}$, qui eſt une équation à une Courbe ſemblable à celle du Corol. 4. du Prob. 1. en pareil cas, & ſemblablement dépendante de la quadrature de l'hyperbole. Ce ſera la même choſe de toutes les autres valeurs de n, ſuppoſé les intégrations neceſſaires.

REMARQUE.

I. Il eſt pourtant à remarquer que ſi l'on ſuppoſe $n = 0$, c'eſt-à-dire ici, la force centrifuge perpendiculaire conſtante & par tout la même, l'une & l'autre des deux équations generales de ce Problême-ci ſe changera en l'imaginaire $dx = \frac{dy}{\sqrt{-1}}$; ce qui n'arrive point dans la generale du Probl. 1. Mais cela ne venant que de ce que cette ſuppoſition de $n = 0$, rend ici $4nn = 0$, & là $\overline{2n+1}^2 = 1$, toutes les autres valeurs de n ne laiſſent pas de donner des Courbes ſemblables de part & d'autre, ou également impoſſibles.

II. Il eſt vrai que la differentielle $2ac^n ddx = bdv \times y^{n-1} dy$ de la premiere des deux équations

tions generales du present Prob. 2. & conséquemment de la seconde, est aussi celle de $2ac^n dx = bdv \times \frac{y^n}{n} \pm bdv \times \frac{g^n}{n}$, d'où resulte pareillement $dx = \frac{by^n \pm bg^n}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bb \times \overline{y^n \pm g^n}^2}} \times dy$ pour l'équation de la Courbe ici requise; mais le cas présent de $n = 0$, la réduisant à $dx = \frac{b \pm b}{\sqrt{-bb \times \overline{1 \pm 1}^2}} \times dy = \frac{1 \pm 1}{\sqrt{-\overline{1 \pm 1}^2}} \times dy$, c'est-à-dire, à $dx = \frac{dy}{\sqrt{-4}}$, ou à $dx = \frac{dy}{\sqrt{-0}}$, y devient aussi imaginaire ou impossible.

III. Ce n'est pourtant pas que ce cas soit absolument impossible, mais seulement qu'il est exclus de la Solut. préced. par le changement qu'on y a fait de $\frac{2ayddx}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$ en $\frac{2addx}{dvdy} = \frac{by^{n-1}}{c^n}$, lequel faisant ainsi évanouïr y de $\frac{2ayddx}{dvdy}$, comme compris dans y^n, il n'en reste plus dans la suite pour ce cas de $n = 0$; au lieu que cet y auroit resté dans la differentielle $\frac{2ayddx}{dvdy} = b$ propre de ce cas, telle qu'elle auroit résulté de $\frac{2ayddx}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$ en y faisant d'abord $n = 0$: c'est, dis-je, tellement cet évanouïssement de y dans $\frac{2ayddx}{dvdy} = b$ qui cause cette exclusion ou impossibilité apparente, qu'en l'y laissant la Courbe de ce cas se trouvera

vera très-réelle. En effet $\frac{2ayddx}{dvdy} = b$ donnant $2addx = bdv \times \frac{dy}{y}$, donnera aussi (en integrant, & dv demeurant constante) $2adx = bdv \times ly$, dont le quarré $4aadx^2 = bb \times ly^2 dv^2 = bb \times ly^2 dx^2 + bb \times ly^2 dy^2$ donnant $4aadx^2 - bb \times ly^2 dx^2 = bb \times ly^2 d^2$, donne aussi $dx = \frac{blydy}{\sqrt{4aa - bbly^2}}$ pour l'équation de ce cas-ci, laquelle doit être réelle tant que bly sera moindre que $2a$.

IV. La differentielle $2addx = bdv \times \frac{dy}{y}$, ayant aussi $2adx = bdv \times ly + bdvlg$ pour intégrale, on trouvera encore de même $\frac{ly + lg}{\sqrt{4aa - bb \times \overline{ly + lg}^2}} \times bdy$ pour l'équation de la Courbe de ce cas-ci, laquelle sera encore réelle tant que $b \times ly + b \times lg$ sera moindre que $2a$.

PROBLEME III.

Trouver la Courbe FM *dont les pressions perpendiculaires causées par la seule pesanteur d'un poids tombant de* A *le long de cette Courbe, soient en raison des puissances* n *des hauteurs* PM *de sa chute.*

SOLUTION.

Les noms & la Figure demeurant encore ici les mêmes que dans le Problême 1. l'on aura $\frac{adx}{dv}$ pour l'expression générale de ces pressions.

sions. Donc la condition de ce Problême-ci donnera $\frac{adx}{dv} = \frac{by^n}{c^n}$, ou $ac^n dx = by^n dv$; & (en quarrant le tout) $aac^{2n}dx^2 = bby^{2n}dv^2 = bby^{2n}dx^2 + bby^{2n}dy^2$, ou $aac^{2n}dx^2 - bby^{2n}dx^2 = bby^{2n}dy^2$; d'où résulte $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{aac^{2n} - bby^{2n}}}$, ou (en faisant $b = a = c$) $dx = \frac{y^n dy}{\sqrt{a^{2n} - y^{2n}}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée, qu'on voit être encore semblable à celles des Probl. 1. 2. n'y ayant de difference ici & là que dans les coëfficiens de aac^{2n}, a^{x2}.

REMARQUE.

I. On ne s'arrêtera point ici à faire voir que dans toutes les suppositions de $n=2$, $n=1$, $n=\frac{1}{2}$, $n=-1$, &c. on aura pareillement ici des Courbes semblables à celles qu'on a déduites des Solutions des Prob. 1. 2. pour tous ces cas, excepté dans celui de $n=0$, qu'on vient de voir dans les art. 1. 2. de la Remarque sur le Prob. 2. ne pouvoir convenir à ce Problême-là.

II. Si au lieu de faire ici $\frac{adx}{dv} = \frac{by^n}{c^n}$, l'on y eût fait $\frac{adx}{dv} = \frac{by^n}{2nc^n}$, l'on y auroit eu la même équation $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}}$ qu'on a trouvée dans la Solution du Probl. 2. Ce qui prouve encore la ressemblance, & même l'identité des Courbes de ces deux Prob. 2. 3.

PROBLEME IV.

Trouver la Courbe FM *dont les pressions perpendiculaires causées par la force centrifuge d'un poids tombant de* A *le long de cette Courbe, soient aux pressions perpendiculaires causées par la pesanteur de ce poids, en raison constante quelconque de* m *à* n.

SOLUTION.

Les noms & la Figure demeurant encore ici les mêmes que dans le Problême 1. l'on aura ici $\frac{2ayddx}{dvdy}$. $\frac{ddx}{dv}$: : $m. n.$ D'où résulte $2nyddx = mdxdy$, ou $2nyddx - mdxdy = 0$: de sorte qu'en multipliant le tout par $\frac{y^{m-1} dx^{2n-1}}{y^{2m}}$, l'on aura pareillement ici $\frac{2ny^m dx^{2n-1} ddx - mdx^{2n} y^{m-1} dy}{y^{2m}}$ $= 0$, dont l'intégrale est $\frac{dx^{2n}}{y^m} = \frac{dv^{2n}}{a^m}$ en prenant dv constante comme l'est a. Et cette intégrale se changeant en $\frac{dx^2}{y^{\frac{m}{n}}} = \frac{dv^2}{a^{\frac{m}{n}}}$, ou en $a^{\frac{m}{n}} dx^2 = y^{\frac{m}{n}} dv^2 = y^{\frac{m}{n}} dx^2 + y^{\frac{m}{n}} dy^2$, & delà en $a^{\frac{m}{n}} dx^2 - y^{\frac{m}{n}} dx^2 = y^{\frac{m}{n}} dy^2$; il en résulte $dx =$

$= \frac{y^{\frac{m}{2n}} dy}{\sqrt{a^{\frac{m}{n}} - y^{\frac{m}{n}}}}$ pour l'équation de la Courbe cherchée.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte que les hypotheſes de $m = 4n$, $m = 2n$, $m = n$, $m = -2n$, &c. donneront ici des Courbes ſemblables à celles qui ont réſulté de $n = 2$, $n = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = -1$, &c. dans les Corol. 1. 2. 3. 4. des Probl. 1. 2. & qui en réſulteroient auſſi dans la Solution du Probl. 3.

REMARQUE.

I. Au lieu de l'intégrale $\frac{dx^{2n}}{y^m} = \frac{dv^{2n}}{a^m}$, on pouvoit prendre pareillement ici $\frac{dx^{2n}}{y^m} = \frac{b^{2n} dv^{2n}}{2na^{2n} \times c^m}$, la differentielle de ces deux intégrales étant la même dans la preſente hypotheſe de dv conſtante; & l'on auroit eu

$$\frac{dx^2}{y^{\frac{m}{n}}} = \frac{b^2 dv^2}{2na^2 \times c^{\frac{m}{n}}} = \frac{bb dv^2}{4nnaac^{\frac{m}{n}}}, \text{ ou } 4nnaac^{\frac{m}{n}}$$

$dx^2 = bby^{\frac{m}{n}} dv^2 = bby^{\frac{m}{n}} dx^2 + bby^{\frac{m}{n}} dy^2$; ce qui don-

donnant $4nnaac^{\frac{m}{n}}dx^2 - bby^{\frac{m}{n}}dx^2 = bby^{\frac{m}{n}}dy^2$,

l'on auroit auſſi trouvé $dx = \frac{by^{\frac{m}{2n}}dy}{\sqrt{4nnaac^{\frac{m}{n}} - bby^{\frac{m}{n}}}}$

pour l'équation de la Courbe cherchée.

II. Si l'on ſuppoſe preſentement $m = 2nn$, cette équation ſe changera en $dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}}$ la même que dans les Probl. 2. 3. Ce qui prouve non ſeulement la reſſemblance des Courbes de ces trois Problêmes, mais encore l'identité de ces Courbes en faiſant ici $m = 2nn$; & ſi l'on joint à ceci ce qu'on a vû dans les Corol. du Probl. 2. de la reſſemblance des Courbes de ce Problême & du Probl. 1. on verra ſans peine que dans les mêmes cas les quatre Problêmes précédens donnent des Courbes ſemblables.

Cela ſe voit encore tout d'un coup en jettant les yeux ſur les deux équations générales

$$dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{\overline{2n+1}^2 \times aac^{2n} - bby^{2n}}}, \quad dx = \frac{by^n dy}{\sqrt{4nnaac^{2n} - bby^{2n}}},$$

dont la premiere eſt celle de la Courbe du Probl. 1. & la ſeconde, celle de la Courbe de chacun des trois autres: ces deux équations étant de même nature, n'y ayant de difference que dans les coëfficiens $\overline{2n+1}^2$, $4nn$, de la grandeur conſtante aac^{2n}.

III. Puiſque (*hyp.*) dans ce dernier Prob. 4. la preſſion cauſée par la force centrifuge du poids comprimant, eſt à ce qu'en cauſe ſa peſanteur : : $m . n$. la ſuppoſition qu'on vient

de

de faire (*art.* 2.) de $m = 2nn$, rendroit ce raport :: $2nn.n$ :: $2n.1$ :: $n.\frac{1}{2}$.

Cela suit encore des Solutions des Probl. 2. 3. Car puisque (*Prob.* 2.) $\frac{2ayddx}{dvdy} = \frac{by^n}{c^n}$, & (*Remarque art.* 2. *Prob.* 3.) $\frac{adx}{dv} = \frac{by^n}{2nc^n}$, la pression de la force centrifuge $\left(\frac{2ayddx}{dvdy}\right)$ doit aussi être suivant ces deux Problêmes à celle $\left(\frac{adx}{dv}\right)$ de la pesanteur :: $\frac{by^n}{c^n}$. $\frac{by^n}{2nc^n}$ :: $2n.1$ :: $n.\frac{1}{2}$. Ce qui est encore une confirmation des ressemblances précédentes.



OBSERVATIONS

SUR LA RHUBARBE.

PAR M. BOULDUC.

* NOus avons dans divers Auteurs une histoire assez exacte de la Rhubarbe, pour me dispenser d'en donner ici la description, ayant seulement dessein de rapporter ce que j'ai connu de ses effets par la pratique, & de ses principes par l'analyse.

Les experiences apprennent que cette racine est un purgatif des plus doux & des plus efficaces, mais l'on soûtient communément qu'elle est en même temps astringente; d'où l'on infere qu'elle évacuë en fortifiant & en res-

* 1710. 15. & 29. Janvier.

refferrant, & qu'elle peut, par de certaines préparations, être dépouillée de fa vertu cathartique & refter toute aftringente, comme fi dans fon état naturel elle étoit compofée de deux parties qui puffent aifément fe divifer & être féparées l'une de l'autre.

Perfonne n'ofera jamais contefter la vertu purgative de la Rhubarbe; mais qu'elle refferre & fortifie encore par elle-même, c'eft ce qui me femble difficile à prouver par des faits fenfibles & convaincans. Je fai qu'outre la faveur amere & nullement defagreable qu'on y remarque quand on la mâche, & qui femble indiquer fa qualité purgative, la langue fe trouve auffi frappée d'une certaine âpreté femblable à celle qui s'obferve dans tout ce que nous appellons aftringent, & qui a fait dire que la Rhubarbe étoit auffi aftringente; mais jufqu'à prefent on n'a pû encore démontrer que les particules qui caufent cette âpreté fur la langue, faffent fur le ventricule & fur le conduit inteftinal une impreffion fuffifante pour les refferrer & les faire entrer en des contractions oppofées à celles par lefquelles les matieres étoient déterminées à y couler de haut en bas, comme on l'éprouve de l'Ypecacuanha, qui manifeftement purge & refferre tout à la fois; & il n'eft pas aifé non plus de fe perfuader qu'après avoir effayé d'ôter à la Rhubarbe la proprieté qu'elle a d'agir par les déjections, il ne lui refte plus que celle de reftraindre.

J'avouë que la Rhubarbe terrefiée ne purge prefque pas, & qu'après avoir tiré la teinture de cette racine, le marc n'eft aucunement purgatif; mais par toutes les épreuves que j'ai

j'ai faites dans les occasions les plus propres à m'en éclaircir, je n'ai pû encore m'assurer que la Rhubarbe, après ces deux préparations & d'autres pareilles, soit veritablement astringente.

Il est constant que dans tous les purgatifs dont on a tiré la teinture par des menstruës convenables, il se rencontre outre cette substance mielleuse qu'on nomme extrait, qui contient toute la vertu purgative, une seconde substance terrestre qui est le marc qui sert comme de frein pour moderer l'activité de l'autre lorsqu'elles ne sont point séparées, & qui ne purge en nulle façon. Il faudroit donc dire sur ce pied-là que le marc ou le résidu de tous les purgatifs seroit astringent, ce qu'on n'a point encore avancé, parce qu'afin qu'un médicament passe pour astringent, il doit sensiblement resserrer & être employé avec succès dans les dévoyemens.

Je vais donc maintenant rapporter ce que j'ai nouvellement observé de la Rhubarbe par les differentes teintures ou extractions & par la distillation, ainsi que j'en ai usé à l'égard des autres purgatifs dont j'ai parlé dans d'autres Assemblées.

J'ai mis en infusion au bain de cendres à chaleur toûjours égale pendant 24 heures deux onces de Rhubarbe choisie coupée par tranches dans 24 onces d'eau de riviere pure; j'en ai ensuite coulé l'infusion que j'ai legerement exprimée; la teinture ayant été bien reposée étoit d'un beau jaune foncé tirant sur le rouge & d'une amertume supportable, avec une âpreté ou astriction médiocre: je n'ai point fait bouillir cette infusion, persuadé par

quantité d'experiences que les purgatifs, principalement d'entre les vegetaux, perdent beaucoup de leur vertu par la grande chaleur ou par l'ébulition, ayant fait évaporer cette teinture jusqu'à consistance d'extrait solide, il m'en est resté quatre dragmes & douze grains.

La teinture d'une dragme de Rhubarbe préparée, comme je viens de le specifier, purge davantage que l'extrait de deux dragmes de Rhubarbe fait de la même teinture; & même 24 grains de Rhubarbe en substance purge plus que l'infusion d'une dragme & demie, & encore plus qu'une dragme d'extrait; il en est de même du Senné & de plusieurs autres purgatifs de cette nature, d'où l'on peut conclure qu'il est souvent plus à propos d'employer les médicamens, sur-tout les purgatifs, sans les décomposer & tels que la nature les produit, à moins que le Medecin n'ait des raisons particulieres pour en user autrement.

Je remarquerai aussi en passant que les infusions des purgatifs vegetaux agissent mieux & ont de meilleurs effets que les décoctions, d'où il paroît que les principes les plus actifs de ces mixtes se dissipent par la chaleur; l'on s'apperçoit même que la plûpart de ces vegetaux gardez trop long-temps, sur-tout en poudre, diminuënt beaucoup de leur énergie.

Pour reprendre le fil de nôtre operation, je dirai qu'ayant fait dessécher le marc de la Rhubarbe dont j'avois tiré cette premiere teinture & le premier extrait; j'ai trouvé le marc du poids d'une once trois dragmes & quel-

quelques grains, & j'ai tiré de la teinture de ce marc par simple infusion : cette seconde teinture étoit plus foible en couleur, moins amere & moins âpre sur la langue, & enfin moins odorante que la précedente, de laquelle elle approchoit fort; mais j'ai remarqué en diverses rencontres que telles secondes teintures purgeoient moins que les premieres, quoique celles-là fussent données en plus grande dose, je n'y ai point non plus remarqué d'astriction.

Après avoir fait évaporer cette seconde teinture bien séparée de ses fêces, j'en ai encore eu trois dragmes d'extrait assez solide; ce dernier extrait purge veritablement, mais notablement moins que celui de la premiere teinture.

Le résidu de cette seconde infusion desséché ne pesoit que sept dragmes, il étoit presqu'insipide & avoit peu d'âpreté.

Je n'ai pas laissé d'en faire une troisiéme infusion par ébulition; la décoction avoit une couleur noire, obscure, sans odeur, avec peu de saveur & presque nulle âpreté.

Je ne me suis pas aperçu que cette troisiéme teinture & son extrait purgeassent, ni qu'ils resserrassent, quoiqu'on les prît en une quantité considerable. J'ai encore retiré de cette troisiéme infusion ou décoction une dragme d'extrait dur, mais d'une consistance peu liée & très-terrestre; ce dernier marc après avoir été bien desséché ne pesoit plus que six dragmes moins quelques grains, sans odeur ni saveur, n'ayant pas même donné de teinture à l'esprit de vin.

J'ai souvent fait prendre de ces differens

residus de Rhubarbe à des malades, sans aucun effet sensible d'astriction.

Les deux onces de Rhubarbe par ces trois infusions ont ainsi rendu une once douze grains d'extrait.

Voilà tout ce que j'ai remarqué de la Rhubarbe examinée par le dissolvant aqueux, vous allez voir ce que m'en a produit le dissolvant sulphureux.

J'ai tiré avec suffisante quantité d'esprit de vin rectifié la teinture d'une once de Rhubarbe dans des vaisseaux convenables par un feu de digestion, lent au commencement, & un peu plus fort sur la fin durant 24 heures. Cette teinture étoit fort legere, d'un beau jaune de citron, & très-differente de celle qui avoit été preparée avec l'eau, non-seulement quant à la couleur, mais encore à raison de la saveur; car cette teinture faite avec l'esprit de vin, est peu amere & presque sans âpreté; ce qui peut faire croire que la qualité purgative de la Rhubarbe réside plus dans ses parties salines que dans ses souphres, qui n'y doivent être que peu considerables, vû que la teinture en étoit très-legere: Je soupçonne même (comme je l'ai dit plusieurs fois) que ce peu de teinture que l'esprit de vin en a tiré, provient de ce qui reste toûjours de phlegme, dont l'esprit de vin se charge, quelque rectifié qu'il semble être.

Ayant retiré par la distillation l'esprit de vin de cette teinture, l'extrait restant pesoit une dragme & demie; il étoit très-beau, sentant bon, & laissant sur la langue le vrai goût de la Rhubarbe, demie-dragme de cet extrait purge légerement & fort doucement.

Cet-

Cette teinture dont l'esprit de vin se charge, ne devient point laiteuse en y mêlant de l'eau, ce qui montre qu'elle ne contient que peu ou point de parties resineuses.

Le residu de la Rhubarbe où l'esprit de vin avoit passé pesoit six dragmes après son parfait dessechement, & il étoit presqu'aussi beau, presqu'aussi amer & aussi âpre qu'étoit la Rhubarbe avant qu'on l'eût employée.

J'ai donné plusieurs fois de ce marc au poids de demie dragme, qui a purgé comme auroit pû faire une pareille dose de Rhubarbe; mais il n'a pas toûjours eu autant d'effet, quoiqu'il n'ait jamais manqué de purger.

J'ai encore retiré la teinture de ce residu avec de l'eau, & j'en ai fait l'extrait; cette teinture & cet extrait purgent comme les premiers dont j'ai parlé.

J'ai remarqué si peu de qualitez dans les dernieres teintures de ce marc, que je n'en ai presque pas fait d'usage.

J'ajoûterai que par l'examen que j'ai fait de toutes ces teintures & de tous ces extraits; ce qu'il y a de plus purgatif & d'astringent dans la Rhubarbe passe dans la premiere infusion & dans le premier extrait, puisque l'une & l'autre sont & plus ameres & plus âpres que les autres.

La distillation de la Rhubarbe par la cornuë à la maniere ordinaire, non plus que les autres purgatifs distilez de même ne m'ont pas beaucoup instruit. De la Rhubarbe ainsi distilée, j'ai tiré par le premier degré du feu un phlegme qui avoit quelqu'odeur de la Rhubarbe, peu d'âpreté & de saveur: les au-

tres portions qui viennent ensuite sont acides par degrez. Les dernieres ne fournissent gueres d'huile; car les mixtes pourvûs de peu de resine, rendent peu d'huile par la distillation: le sel extrait du *Caput mortuum* est en petite quantité & fermente avec les acides.

Par tous les faits que je viens de rapporter, il me semble qu'on doit être aussi incertain de la faculté astringente de la Rhubarbe, qu'assuré de sa faculté purgative; celle-là n'étant établie que sur un leger goût d'âpreté ou d'astriction qu'on y observe; la terrefaction qu'on en fait sur le feu, ne lui laissant qu'une substance terrestre, des proprietez de laquelle on ne sait encore rien de constant; de sorte que si dans les dévoyemens on se sent plus soulagé & moins abatu après l'usage de la Rhubarbe que si l'on avoit pris la plûpart des autres purgatifs, c'est parce qu'ordinairement elle ne cause ni tranchées ni dégoûts, & qu'en dégageant les vaisseaux, des humeurs qui les incommodoient, elle permet aux ressorts de reprendre leur tension & leur direction naturelles.



OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 13 Fevrier au soir de l'an 1710.

PAR Mrs CASSINI & MARALDI.

* POur observer l'Eclipse de Lune qui est arrivée le 13 de Fevrier au soir, nous avions préparé une Lunete de 8 pieds qui avoit à son foyer un Chassis divisé en plusieurs intervalles égaux par des fils de soye posez à égale distance l'un de l'autre & paralleles entr'eux, qui devoient servir à déterminer les phases de la Lune éclipsée.

Le soir deux heures avant l'Eclipse, nous observâmes que le diametre apparent de la Lune comprenoit précisément 22 de ces intervalles, & que chacun étoit égal à 33 minutes de doit.

Ces intervalles entre lesquels la Lune étoit comprise, comparez avec la longueur de la Lunete, donnerent le diametre apparent de la Lune de 33′ 30″, précisément comme nous l'avons trouvée aussi par l'observation de son passage par un cercle horaire, toutes les réductions étant faites.

Le Ciel n'a pas toûjours été favorable pour l'observation de cette Eclipse, la Lune ayant presque toûjours paru au travers des nuages qui se confondoient avec le terme de l'om-

K 7 bre,

* 1710. 19. Fevrier.

bre, & rendoient souvent douteuse la détermination des phases. Il n'y eut qu'environ une demie heure avant la fin que la Lune parut claire, & qu'on put observer l'Eclipse assez exactement.

9h 10′ La Lune ayant paru assez claire & bien terminée, on ne voïoit encore aucune marque d'Eclipse.

9h 18′ 30″ La Lune aïant paru au travers des nuages rares, l'Eclipse paroît avoir commencé.

9 22 La partie éclipsée paroît égale à un intervalle entre deux fils, ce qui donne un peu plus de demi-doit d'Eclipse; mais l'ombre est mal terminée.

9 28 L'ombre a toûjours été mal terminée, & la Lune se couvre.

9 42 On voïoit la Lune au travers des nuages sans rien distinguer.

10 14 La partie de la Lune comprise entre le bord clair & les cornes de la Lune, étoit de dix intervalles; ce qui donne la grandeur de l'Eclipse de 7 doigts & demi.

10 17 La Lune aïant paru assez claire on a trouvé la grandeur de l'Eclipse de 8 doigts 40 minutes; mais le terme de l'ombre qui tomboit sur des taches obscures rend cette détermination un peu douteuse.

10 22 La distance entre les deux cornes de la Lune étoit de 20 intervalles & demi; ce qui donne la portion de la circonference de la Lune éclipsée de 222 degrez.

10h 25′ La

10h 25′ La partie claire de la Lune occupoit 4 intervalles & demi, d'où la grandeur de l'Eclipse résulte de 9 doigts 32 minutes.

10 28 La Lune se couvre entierement, & ne se découvre qu'à 10h 59′, & pour lors la partie claire m'a paru moindre qu'elle n'avoit été à 10h 28′. Ainsi le milieu de l'Eclipse a été plus proche de 11h que de 10h & demi.

11 5 28 Les nuages étant plus rares on a commencé de voir le Cœur du Lion, qui étoit éloigné vers l'Orient à l'égard du bord oriental de la Lune qui étoit éclairé de 8 intervalles des fils qui font 12 minutes & demi d'un grand cercle.

11 12 50 Le Cœur du Lion étoit dans le parallele du bord superieur de la Lune.

11 19 La grandeur de l'Eclipse est environ de 8 doigts.

11 22 La grandeur de l'Eclipse est de 7 doigts 36′.

11 28 L'Eclipse est de 7 doigts.

11 35½ La partie claire de la Lune comprenoit dix intervalles, ce qui donne la grandeur de l'Eclipse de 6 doigts 30′.

11 36 15 L'ombre est à Menelaüs.

39 50 L'ombre au bord de *Mare serenitatis.*

11 41 20 L'ombre à Plinius.

11 44 La grandeur de l'Eclipse est de 4 doigts 50′. 11h 45′ 40″.

11^h	45′	40″	L'ombre à Dionysius.
11	45	50	L'ombre passe par le milieu de Tycho.
11	47	10	L'ombre arrive au second bord de Tycho.
11	50		Grandeur de l'Eclipse, 4 doigts 18′.
11	51	20	L'ombre à Proclus.
11	54	45	L'ombre à *Promontorium acutum*.
11	57	50	L'ombre au bord de Caspie.
12	59		L'Eclipse est de 2 doigts 6 minutes.
12	4$\frac{1}{3}$		L'Eclipse est de 1 doigt 31′.
12	8		L'Eclipse est de 1 doigt.
12	11		Elle est de 25 minutes.
12	12$\frac{1}{3}$		J'ai jugé que c'étoit la fin de l'Eclipse, quoique par le progrès des phases précedentes elle ait pû arriver deux ou trois minutes plus tard.

Outre les Observations que nous avons rapportées de la Lune avec le Cœur du Lion, nous en avons fait diverses autres pendant le temps de l'Eclipse & après pour la recherche de la parallaxe de la Lune; mais à cause des nuages qui empêcherent de faire des observations necessaires à une grande distance du Meridien, on ne put pas profiter entierement comme on auroit souhaité, de cette rencontre qui étoit la plus favorable qui se soit presentée depuis long-temps pour cette recherche.

OB



OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Lune arrivée la nuit entre le 13 & le 14 Fevrier 1710, à l'Observatoire.

PAR MM. DE LA HIRE.

* LE Ciel fut toûjours couvert dans le commencement de cette Eclipse; cependant on ne laissoit pas de voir la Lune de temps en temps au travers de quelques nuages; mais comme elle disparoissoit presque à l'instant, nous ne pûmes rien déterminer de bien juste. Nous estimâmes seulement que le commencement avoit pû être vers 9h 16'. L'ombre de la Terre ne nous paroissoit pas bien terminée comme on la voit quelquefois, nous observâmes seulement que

à 10h 15' l'Eclipse étoit de 9 doigts 24 minutes &

à 10 18 elle étoit de 9 doigts 30 minutes.

Le Ciel se couvrit ensuite de telle maniere que nous ne pûmes rien observer, jusqu'un peu après 11 heures où il devint fort serein & l'ombre paroissoit bien nette.

			Doigts éclipsés.	M.
à 11h	7'	5"	9	31
11	9	11	9	18
11	11	17	9	4
11	13	22	8	50

à 11h

* 1710. 9. Fev.

			Doigts éclipsés.	M.
à 11h	15′	25″	8	36
11	17	29	8	23
11	19	32	8	10
11	21	34	7	56
11	23	36	7	42
11	25	34	7	28
11	27	31	7	16
11	29	27	7	2
11	31	22	6	48
11	33	16	6	34
11	35	6	6	20
11	36	55	6	7
11	38	43	5	54
11	40	30	5	40
11	42	16	5	27
11	43	58	5	14
11	45	38	5	0
11	47	17	4	47
11	48	55	4	33
11	50	31	4	20
11	52	5	4	6
11	53	37	3	52
11	55	8	3	38
11	56	38	3	25
11	58	6	3	11
11	59	27	2	58
11	0	46	2	44
12	2	3	2	31
12	3	18	2	17
12	4	31	2	4
12	5	42	1	50
12	6	51	1	37
12	7	43	1	23
12	8	32	1	9
12	9	18	0	55

à 11h.

			Doigts éclipsés.	M.
à 12h	10′	3″	0	42
12	10	47	0	28
12	11	31	0	14
12	12	15	0	0 Fin.

Vers la fin de l'Eclipse l'ombre nous paroissoit fort mal terminée.

Toutes ces observations ont été faites avec le Micrometre, & nous en avons tiré les temps de l'Eclipse en doigts entiers comme il suit.

			Doigts.
à 10h	18′	0″	9½
11	7	0	9½
11	11	53	9
11	20	59	8
11	29	44	7
11	37	53	6
11	45	38	5
11	52	45	4
11	59	15	3
12	4	51	2
12	8	47	1
12	12	15	0 Fin.

Nous pourrons tirer le milieu de l'Eclipse à 10h 42′½ des deux Observations correspondantes de 9 doigts ½; mais pour une détermination exacte il faudroit avoir plusieurs de ces Observations.

Nous avons aussi observé l'ombre sur quelques Taches du disque de la Lune tant en entrant qu'en sortant.

à 9h 26′ 20″ Grimaldi entre dans l'ombre.
10 21 0 L'ombre entre sur *Mare Crisium.*

à 10h

à 10^h	24′	0″	L'ombre au milieu de *Mare Crisium.*
11	10	0	Emersion du milieu de Grimaldi.
11	38	0	Emersion de Menelaüs.
11	39	0	Emersion de *Insula Sinus medii.*
11	40	0	L'ombre quitte tout à fait *Mare serenitatis.*
11	40	0	Emersion de Pline.
11	45	0	Emersion de Dionysius.
11	46	0	Emersion de Tycho.
11	47	30	Commencement de l'Emersion de *Mare Crisium.*
11	53	0	Emersion de *Promontorium acutum.*
11	58	0	Emersion totale de *Mare Crisium.*

Nous observâmes aussi le 12 Fevrier au soir le passage du centre de la Lune par le Meridien à 11h 7′ 49″, & sa hauteur Meridienne apparente de 60° 13′ 46″, & son diametre étoit de 33′ 37″½.

Vers la fin de l'Eclipse la Lune passa aussi au Meridien, & son centre y arriva le 14 au matin à 0h 3′ 58″: la hauteur meridienne apparente de son centre étoit alors de 53° 57′ 49″, & son diametre observé avec le Micrometre de 33′ 52″.

OB-



OBSERVATION
DE L'ECLIPSE DE LUNE
du 13 *Fevrier* 1710,

Faite à Versailles *en présence de* MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

PAR M. CASSINI le Fils.

* LE Ciel étoit couvert à *Versailles* au commencement de l'Eclipse, & il tomboit une pluye fine. A 9^h 53′ on apperçut la Lune entre les nuages éclipsée d'environ 6 doigts, à ce qu'on en put juger à la vûë simple. Le Ciel se découvrit un peu à 10^h 32′, & à 10^h 45′ la Lune parut dans sa plus grande Eclipse de 9 doigts 55′.

On observa ensuite assez distinctement l'Emersion de quelques Taches de l'ombre comme il suit.

à 11^h	5′	30″	Galilée étoit éloigné de l'ombre du diametre de cette Tache.
11	7		Grimaldi commence à sortir de l'ombre.
11	9		Grimaldi est entierement sorti.
11	22		L'ombre quitte Copernic.

à 11^h

* 1710. 19. Fevrier.

à 11h	40″		Pline commence à ſortir.
11	49	15	Proclus commence à ſortir.
12	11	30	Fin de l'Eclipſe obſervée par Monſeigneur le Duc de *Bourgogne*, avec une Lunette de 4 pieds.
12	12	0	Fin de l'Eclipſe obſervée avec une Lunette de 6 pieds.

Auſſi-tôt après la fin de l'Eclipſe on obſerva avec un quart-de-cercle de deux pieds de rayon, quelques hauteurs du petit Chien, pour regler la pendule à ſecondes & déterminer l'heure veritable des Obſervations telle qu'elle eſt marquée ci-deſſus. La difference des Meridiens qui eſt entre *Verſailles* & l'Obſervatoire Royal ayant été determinée géometriquement par des Triangles de 0′ 50″ dont *Verſailles* eſt plus à l'Occident. La fin de l'Eclipſe a dû arriver à *Paris* ſuivant la premiere détermination obſervée avec une Lunette de 4 pieds à 12h 12′ 20″; & ſuivant la ſeconde à 12h 12′ 50″.

On appercevoit pendant cette Eclipſe le cœur du Lion, qui fut en conjonction avec la Lune & une autre petite Etoile qui devoit entrer dans le diſque de la Lune; mais la clarté de la Lune qui recouvroit ſa lumiere nous empêcha de l'obſerver.

DES



DES POINTS DE RUPTURE DES FIGURES.

De la maniere de les rappeller à leurs Tangentes : D'en déduire celles qui sont par-tout d'une résistance égale : Avec la Méthode pour trouver tant de ces sortes de Figures que l'on veut : Et de faire ensorte que toute sorte de Figure soit par tout d'une égale résistance, ou ait un ou plusieurs points de rupture.

I. MEMOIRE.

Des Figures retenues par un de leurs bouts, & tirées par telles & tant de puissances qu'on voudra.

PAR M. PARENT.

* I. Art. SOit (*dans les 6. 1res figures*) un corps quelconque *EFaAB* retenu fixement par sa bâse *EBAC*, & dont toutes les Tranches *ebac* paralleles à *EBAC* lui soient en même temps proportionnelles ; en sorte qu'ayant divisé les axes *EB*, *eb* de ces tranches proportionnellement en *D*, *d*, leurs ordonnées *DC*, *dc*, ayent un même raport aux dernieres ordonnées *AB*, *ab*, & entre elles, comme je l'ai supposé dans les Memoires du 2 Avril 1704, & du 4 Juin 1707. Soit *BbF* l'axe de ce corps qu'on suppose perpendicu-laire

* 1710. 22. Fevrier.

laire aux tranches *EBA*, *eba*, auſſi-bien qu'à la commune direction *PM* des puiſſances *M* qui doivent rompre ce corps, comme dans le cas le plus ordinaire, & auquel tous les autres cas peuvent aiſément ſe rapporter. Soit *PM* cette direction commune rencontrant *BF* en *P*; *M* la force compoſée de toutes les puiſſances quelconques appliquées à rompre ce corps. Il a été démontré dans les Memoires citez, [*Que les réſiſtances des bâſes* EBAC, ebac, *ſont entr'elles comme les produits* $EB^2 \times BA$, $eb^2 \times ba$ *continuellement*], en ſuppoſant les unes & les autres prêtes à ceder: ce qui ſe reduit à EB^3 & eb^3, quand ces baſes ou coupes ſont des figures ſemblables; à EB^2 & eb^2, lorſque ces baſes ou coupes ſont des rectangles rompus en côté; & enfin à *BA*, *ba*, quand ce ſont des rectangles rompus à plat.

Si l'on ſuppoſe donc par penſée, & pour un temps ſeulement, que le corps *EFAB* ſoit dans un tel état de tenſion, que toutes ſes tranches imaginables *EBAC*, *ebac*, ſoient prêtes à ſe ſéparer, & que le rapport $\frac{M \times PB}{EB^2 \times AB}$ ſoit continuellement égal au rapport $\frac{M \times Pb}{eb^2 \times ba}$, il eſt évident que ce corps pourra être tenu en cet état de tenſion par la ſeule puiſſance *M*. Mais ſi la ſuppoſition reſtant toûjours la même, le rapport $\frac{M \times Pb}{eb^2 \times ba}$ eſt plus grand que $\frac{M \times PB}{EB^2 \times BA}$, & que tous ſes pareils, cette tranche *ebac* ſera plus foible pour réſiſter à la puiſſance *M*, que toutes ſes pareilles, ainſi, ſi la puiſſan-

ſance M eſt ſuffiſante, la rupture ſe fera en *ebac*. Il s'agit donc maintenant de trouver toutes les figures infinies qui ont cette proprieté, d'être prêtes à rompre dans tous leurs points à la fois ; ou ſi elles ne l'ont pas, de la leur faire avoir. Et à l'égard des autres figures, de trouver leur point, ou leurs points de rupture, ſi elles en ont un ; ou ſi elles n'en ont pas, de leur en faire avoir : & enfin de trouver en même temps les puiſſances M qu'il faut appliquer, pour les ſéparer, dans les points de rupture.

I. Principe pour les points de rupture, & les figures d'égale réſiſtance tirées par des puiſſances conſtantes.

Pour cet effet ſoit $BE=a$, $BA=b$, $BF=c$, $bP=u$, $bF=x$, $be=y$, $ba=z$. Soit $\varepsilon\beta\alpha x$ une 3ᵉ tranche parallele aux 2. 1ᵉˢ & indéfiniment proche de *ebac*, qui donnera $b\beta=dx$: on aura donc pour les expoſans des réſiſtances des tranches *EBAC*, *ebac*, a^2b, & y^2z, & le rapport $\frac{Mu}{y^2z}$ devra être conſtant pour les figures d'égale réſiſtance, ou égale à une quantité conſtante c ; & pour les points de rupture des figures qui en ont, ce rapport devra être égal à un *Maximum*, ce qui donnera pour les figures d'égale réſiſtance tirées par une force conſtante M la formule générale $Mu=y^2zc$; car appellant e la diſtance conſtante PF, on aura $u=x\pm e$, ce qui la changera en celle-ci $M\times x\pm e=y^2zc$. Or il eſt évident que ſi le profil FaA par exemple
 étant

étant donné en x, & en quantitez constantes à souhait, l'on substitue dans cette formule la valeur de z, ou ab en x ou bF, il en résultera une équation exprimée toute en x, y, & en quantitez constantes, laquelle marquera la nature du profil FeE desiré: ou tout au contraire; si l'on y substitue une valeur arbitraire de y ou be en x, & en quantitez constantes, il en résultera une équation toute exprimée en x & z & en quantitez constantes, laquelle exprimera la nature du profil desiré FaA.

A l'égard de la nature des tranches $ABEC$, $abec$, elle pourra être telle qu'on voudra, pourvû qu'elles soient toutes proportionnelles entr'elles, ce qui donnera une infinité de figures differentes toutes d'égales résistances.

II. Principe pour les figures d'égale résistance tirées par des puissances variables.

Mais si M represente un assemblage quelconque de quantitez variables, la distance PF sera alors une quantité variable, le centre commun P de toutes ces puissances changeant de place à mesure que FB variera. Mais Mu étant toûjours égal à la somme des momens infinis de chacune des puissances rompantes par leurs distances particulieres à l'axe ab; & lorsque ab se change en $\alpha\beta$, cette somme n'augmentant que du produit de la somme M des mêmes puissances par $b\beta$ (comme il est évident) il s'ensuit que la differentielle ou l'accroissement de Mu est Mdx. Tirant donc la difference de la formule ci-devant

Mu

$Mu = y^2zc$, on aura $Mdx = dy^2z$; & tirant une 2e fois la difference de cette équation, en ſuppoſant les dx, conſtantes, il vient $\frac{dxdM}{c} = ddy^2z$. Or il eſt évident que dM marque ſeulement la difference des forces variables rompantes, qui n'eſt autre choſe que la force rompante appliquée à la tranche élémentaire $abc\varepsilon\beta\alpha$, telle que ſoit cette force.

On peut donc prendre pour régle générale des figures d'égale réſiſtance tirées par des forces variables à ſouhait. [*Que les ſecondes differences* ddy²z *des réſiſtances de leurs tranches* ECBA, ecba, &c *doivent être continuellement entr'elles en même raiſon que les forces rompantes appliquées à ces mêmes tranches.*] D'où il ſuit que pour rendre toute ſorte de figure proportionnelle *EFAC* d'égale réſiſtance, il faut appliquer à chacune de ſes tranches *ebca*, des puiſſances qui ſoient entr'elles comme les ſecondes differences des réſiſtances de ces mêmes tranches, ſavoir comme les $dd.y^2z$. Si l'on ſuppoſe, par exemple, que la figure *EFcA* (4. *fig.*) ſoit une eſpece de Pyramide dont le profil *EeF* ſoit une 1re Parabole, & le profil *AaF* une des 1es paraboles à l'infini, deſquelles paraboles *F* ſoit le ſommet commun & *BF* une commune tangente, l'équation du profil *EeF* ſera $y = x^2$, & celle du profil *AaF* ſera $z = x^p$, & la tranche *ebac* ſera continuellement exprimée par le produit $yz = x^{2+p}$. Sa réſiſtance ſera $y^2Z = x^{4+p}$, dont la difference $= \overline{4+p}dx \times x^{3+p}$, & derechef la difference de cette difference ſera $y^2z = x^{4+p}$ (en ſuppoſant toûjours les dx conſtantes)

L 2 =

$= 4 + p \times 3 + pdx^2 \times x^{2+p}$, laquelle est continuellement en même proportion que les $yz = x^{2+p}$, ou que les tranches mêmes *ebac*. Ce qui nous apprend que cette espece de Pyramide est par tout également résistante par sa propre pesanteur.

III. Principe. Pour les points de rupture des figures tirées par des puissances variables quelconques; qu'on appliquera dans la suite à des variables mêlées de constantes.

On prendra la differentielle du rapport $\frac{Mu}{y^2z}$ qu'on égalera à zero, ce qui donnera l'égalité $y^2z \times Mdx = 2ydyzMu + y^2dzMu$, d'où l'on tire cette autre $\frac{yzdx}{2dyz + ydz} = u$, & enfin celle-ci

$$\left\{\frac{\frac{ydx}{dy} \times \frac{zdx}{dz}}{\frac{ydx}{dy} + \frac{2zdx}{dz}}\right\} = u = \frac{bZ \times bY}{bZ + 2bY}.$$

Dans laquelle on voit à l'œil que $\frac{ydx}{y}$, & $\frac{zdx}{dz}$ sont les deux soûtangentes bZ, bY (6. 1res fig.) aux points e & a des profils *EeF*, *AaF*; ce qui donne un principe géneral pour tous les points de rupture, savoir qu'au point de rupture b, [*Le produit des deux soûtangentes qui répondent à ce point, divisé par la somme de la soûtangente qui répond à l'ordonnée verticale, & du double de la soûtangente qui répond à l'ordonnée horizontale, est toûjours égal au levier commun de toutes les puissances rompantes.*]

Con-

Connoiſſant donc par les méthodes ordinaires les ſoûtangentes bZ, bY, aux points e & a, au moyen des équations des profils EeF, AaF, ſi l'on en forme la valeur ci-deſſus, cette valeur ſera toute exprimée par les abſciſſes bF ou par x; de même que le levier $bP = u$ eſt exprimé lui-même auſſi en x par la connoiſſance de la figure $EBAF$, & des puiſſances rompantes qu'on y applique. C'eſt pourquoi égalant ces deux quantitez, on aura une équation toute exprimée en x, qui donnera la diſtance Fb du ſommet F au point de rupture deſiré b.

Si l'on ſuppoſe par exemple le poids conſtant M attaché en F (7. *fig.*); pour le profil EeF l'équation $y = \frac{a2}{x}$, & pour le profil AaF l'équation $z = \frac{b2}{c-x}$. Le premier ſera une premiere hyperbole entre les Aſymptotes FV, FB dont F ſera le centre; & le ſecond ſera une autre premiere hyperbole entre les Aſymptôtes BA, BF, ayant ſon centre en B, & BF ſera $= c$; la ſoûtangente bZ de la premiere, $= -x$; & celle de la ſeconde, $= c - x = bY$, ce qui change la formule generale $\frac{bZ \times bY}{bZ + 2bY} = x$, en cette autre $\frac{x^2 - cx}{2c - 3x} = x$, d'où l'on tire $\frac{3}{4}c = x = bF$ deſirée.

On trouvera la même choſe en changeant le rapport $\frac{Mu}{y^2z}$, ou ici $\frac{Mx}{y^2z}$ en cet autre $\frac{M \times x^3c - x^4}{a^4b^2}$ au moyen des deux équations ci-deſſus, & l'égalant

lant à un *Maximum* ſelon le premier Principe, & par les Méthodes ordinaires.

IV. Principe, pour les figures d'égale réſiſtance tirées par des puiſſances variables quelconques.

Du dernier Principe, on en peut tirer un troiſiéme pour les figures d'égale réſiſtance, ſavoir [*Que toutes celles dans leſquelles le produit des deux ſoutangentes par un même point de l'axe diviſé par la ſomme de celle qui répond à l'ordonnée verticale, & du double de celle qui répond à l'ordonnée horizontale, eſt continuellement égal au levier des puiſſances variables rompantes ſont par tout également réſiſtantes*] c'eſt ce qu'on peut voir dans la pyramide ci-deſſus (4.*fig.*)

Premiere Remarque ſur les points de rupture.

Il faut remarquer que ſi *M* répréſente une ou pluſieurs puiſſances conſtantes mêlées avec les variables, ou plûtôt une ſeule puiſſance conſtante égale à toutes les conſtantes enſemble, conçuë dans leur centre commun de gravité, & jointe avec ces variables quelconques; *bP* ou *u* renfermera cette même conſtante. Mais comme la valeur de cette conſtante capable conjointement avec les variables de rompre le corps en *ebac* eſt inconnuë, puiſque cette tranche *ebac* n'eſt pas encore connuë, il eſt évident qu'on aura dans la premiere équation deux inconnuës, ſavoir *x*, & cette conſtante. C'eſt-pourquoi avant d'en tenter la réſolution, il faudra chercher une ſeconde équation par l'analogie ſuivante: Com-

Comme la résistance de la base *EBAC* à être rompuë, est à celle de la tranche *ebac*; ou comme $BE^2 \times BA$, est à $be^2 \times ba$: ainsi le moment du poids quelconque trouvé par experience capable de rompre la figure dans sa bâse *EBAC* avec un levier quelconque; au moment capable de la rompre dans *ebac* avec le levier *bP*; lequel moment on égalera au moment $M \times bP$ qui est tout exprimé par *x*, & par la force constante renfermée en *M*, & avec ces deux équations on trouvera & la distance *Fb* desirée & la valeur, & cette force constante capable avec la variable de rompre la figure en *ebca*.

Seconde Remarque sur les points de rupture.

Souvent les figures qui n'ont point de point de rupture étant tirées par quelqu'un de leurs points, comme (par exemple) par le sommet *F*, se trouvent en avoir lorsqu'on les tire par quelqu'autre *P* pris au delà, ou en deçà de *F*, à l'égard de la bâse *EBAC*; ou même en les tirant toûjours par le même point *F*, & leur ajoûtant quelque figure connuë, comme un triangle, un rectangle, &c. dont on verra des exemples dans la suite.

Conséquences tirées des Principes précedens.

II. Art. Ces principes étant établis, voici plusieurs conséquences qui s'en déduisent naturellement, & qui serviront elles-mêmes de principes particuliers pour les figures plus simples.

Premierement, pour les points de rupture

des Sphéroïdes & Conoïdes, il eſt évident que les profils *EeF*, *AaF* étant les mêmes (1. & 4. *fig.*) les ſoûtangentes *bZ*, *bY*, qui répondent aux points *e* & *a*, feront égales; ce qui réduira la ſeconde formule des points de rupture tirée du ſecond Principe, [*Au quarré de la ſoutangente* bZ *ou* bY *diviſé par trois fois la même ſoutangente*; *de ſorte qu'alors* bP *eſt toûjours le tiers de la ſoutangente* bZ *ou* bY.]

Et pour les Sphéroïdes & Conoïdes d'égale réſiſtance, il eſt manifeſte [*Que* bP *doit être continuellement le tiers de* bZ]; & comme dans la premiere parabole cubique *EeF* (1. *fig.*) dont *BF* eſt l'axe & *F* le ſommet, *bF* eſt continuellement le tiers de *bZ*, on ne peut douter que ſi *M* eſt une force conſtante attachée en *F*, le Conoïde *EFcA* ne ſoit alors tendu également dans toutes ſes coupes *EBAC*, *ebac*, comme nous l'avons marqué dans le Memoire cité de 1704, en parlant de la figure naturelle des bornes des portes & des murs. Au reſte cette même figure eſt une de celles qui ont été remarquées par *Galilée*, par M. *Leibnits*, & enſuite par M. *Varignon*.

La même choſe ſe tire de la formule $Mu = y^2zc$ du premier Principe qui devient ici $Mx = y^2zc$: parce que y étant égal à z, on a $\frac{Mx}{c} = y^3$, dans laquelle M étant conſtante, on voit que cette équation eſt celle de cette premiere parabole cubique.

Mais ſi *M* eſt une force variable, comme par exemple, la peſanteur des coupes mêmes, *ebac*; *EeF*, *AaF* (4. *fig.*) feront dans ce cas des premieres paraboles dont *BF* ſera la tangente

par

par le sommet commun F; parce que dans ce cas la distance bZ ou bY est continuellement triple de la distance bP de la coupe $ebca$, au centre de gravité P de la portion $eFac$; bZ ou bY étant toûjours dans cette Parabole la moitié de bF, & bP n'étant jamais que la sixiéme partie de la même bF, ce qui est connu de tous les Méchaniciens.

La même chose se tire du second Principe des figures d'égale résistance; car z étant $=y$, on a $dz=dy$, & $ddz=ddy$. Donc la formule de ce Principe donne cette équation $\frac{dxdM}{c} = ddy^2z = 6dy^2y + 3y^2ddy$, dans laquelle $dM = y^2dx$ continuellement à cause de la similitude des coupes. Substituant donc cette valeur de dM dans cette équation, il vient l'équation differentielle $\frac{dx^2y}{c} = 6dy^2 + 3yddy$, dont l'intégrale est $y = \frac{x^2}{30}$ qui convient à la premiere parabole.

Si M represente le vent (1. & 4. *Figures*), la Figure EFA sera alors un Cône dont EBA sera la base, F le sommet, & BF l'axe; mais il faut considerer cette Figure comme exemte de pesanteur. Dans cette Figure bP est toûjours le tiers de la hauteur bF, (à cause que les impressions du vent sur les tranches semblables $\varepsilon e a \alpha$, se font comme si ces tranches étoient plates), & bF est toûjours la soûtangente qui répond au point b. Cette Figure n'avoit pas encore été marquée; on la trouve dans nôtre Memoire de 1704.

La même chose se tire du second principe

 des

des Figures d'égale résistance, en intégrant l'équation $\frac{dx^2}{c} = 6dy^2 + 3yddy$ qui est tirée de sa formule $\frac{dxdM}{c} = dd.\ y^2z$, à cause qu'alors $dM = ydx$.

Secondement pour les lames rompuës sur le chan ou en côté, on aura tous les z ou les AB, ab (3. & 6 *Fig.*) égaux entr'eux, ainsi la soûtangente bT sera alors infinie; c'est-pourquoi la formule $\frac{bT \times bZ}{2bT + bZ} = bP$ du second principe des points de rupture se réduira à $\frac{bZ}{2} = bP$. De sorte qu'en ce cas: Le levier bP est toûjours la moitié de la soûtangente bZ au point de rupture b.

A l'égard des Figures d'égale résistance, il est manifeste Que celles-là où ce levier bP sera continuellement la moitié de la soûtangente bZ, résisteront également dans toutes leurs parties. C'est-pourquoi dans la premiere Parabole EeF (3. *Fig.*) dont BF est l'axe, F le sommet, & dans laquelle abscisse bF est continuellement la moitié de la soûtangente bZ, on ne peut douter que si l'on suspend un poids constant M en F, la lame EeF ne soit alors également tenduë dans toutes ses parties, pourvû que l'on n'ait point égard aux poids de ces mêmes parties, comme les Auteurs cités l'ont remarqué.

La même chose se tire encore tout d'un coup de la premiere formule $Mx = y^2zc$ du premier principe qui devient alors $Mx = y^2zc$, parce qu'alors z & M sont des quantités conf-

constantes; ce qui la réduit à $x = y^2$, en prenant $M = zc$.

Mais si *M* represente (par exemple) la pesanteur des tranches *ebac* (6. *Fig.*); alors le profil *EeF* sera la même premiere Parabole sur sa tangente *BF* par son sommet *F*, que pour le Conoïde ci-dessus (4. *Fig.*); parce qu'en ce cas *bP* est toûjours $\frac{1}{4}$ de *bF*, & que *bZ* en est toûjours la moitié. Donc *bP* est aussi toûjours $= \frac{1}{2} bZ$.

Ceci se trouve encore par le second principe des Figures d'égale résistance; car les *z* étant constans, les *dz* & *ddz* n'ont plus lieu: ainsi la formule de ce principe se réduit à $\frac{dxdM}{c} = dd.y^2z = 2dy^2z + 2ddyzy$, dans laquelle *dM* vaut *ydx*, ce qui donne l'équation $ydx^2 = 2dy^2 + 2yddy$, en prenant *zc* pour l'unité; de laquelle l'intégrale seconde est $\frac{x^2}{12} = y$, ce qui fait voir que la figure de cette lame est telle qu'on la vient de marquer.

Cette figure a été encore remarquée par les Auteurs cités.

Si *M* represente le vent venant perpendiculairement à *BF* (3. & 6. *Fig.*) choquer en côté, il est évident qu'alors *EeFB* sera un triangle dont *F* sera la pointe & *EB* la base. Car dans cette figure la distance *bP* de la tranche *eba* au centre *P* d'impression du vent, sera toûjours la moitié de *bF* qui est la soûtangente au point *e*; mais on n'a point égard aux poids des differentes parties de cette figure.

C'est encore une de celles qui ont été observées par les Auteurs cités.

La même chose se connoît par le second principe d'égale résistance, en intégrant l'équation $\frac{dx^4}{dx^2+dy^2 \times zc} = 2dy^2 + 2yddy$ qui est tirée de sa formule $\frac{dx\,dM}{c} = dd.y^2z$; parce qu'alors $dM = \frac{dx^3}{dx^2+dy^2}$, ce qu'on trouve dans nos Elémens de Méchanique & de Physique, & ailleurs.

Troisiémement, enfin à l'égard des lames rompuës sur le plat, on aura tous les *y* ou *BE*, *be* (2. & 5. *Fig.*) égaux, ce qui rendra la soûtangente *bZ* infinie. Ainsi la formule des points de rupture du second principe $\frac{bT \times bZ}{2bT + bZ} = bP$ se réduira à $bT = bP$; de sorte qu'en ce cas la soûtangente *bT* au point de rupture *b* sera toûjours égale au levier même *bP* ou *bF*.

Et à l'égard des figures d'égale résistance, il est évident : Que celles-là où le levier *bP* sera continuellement égal à la soûtangente *bT* du point *b*, seront par tout également résistantes. C'est-pourquoi si la figure *ABF* est un triangle dont *AB* soit la base, & *F* le sommet où l'on ait suspendu un poids constant *M*, comme en ce cas la soûtangente *bF* au point *b* sera toûjours la même chose, que le levier *bF* ; on ne peut douter que cette figure ne soit par tout également résistante, & cela sans avoir égard aux poids des differentes parties de la figure.

Cette figure a encore été reconnuë par les Auteurs cités.

La

La même chose se tire encore de la formule $Mu = y^2 zc$ du premier principe, qui devient ici $Mx = y^2 zc$, & dans laquelle M & y sont des quantités constantes, ce qui la réduit à $x = z$ en supposant $M = cy^2$.

On peut dire la même chose d'un trapese que d'un triangle, tout étant d'ailleurs le même & par la même raison.

Cette derniere proprieté n'avoit pas encore été remarquée.

Mais si M (5. *Fig.*) represente la pesanteur, ou l'effort du vent soufflant contre la face de la lame (lequel en ce cas fait le meme effet), ou même tous les deux ensemble, & que l'on se serve de la formule du second principe des figures d'égale résistance $\frac{dxdM}{c} = dd.y^2Z$, dans laquelle $dM = dxz$, & où les dy, dy^2 & ddy n'ont point lieu, à cause qu'ici tous les y ou be sont supposés égaux, on la réduira à la simple $\frac{dx^2z}{c} = y^2ddx$, ou si l'on veut à $dx^2 = \frac{ddz}{z}$ en supposant la constante $cy^2 = 1$. Or cette équation fait voir que la lame $AaPB$ est en ce cas une Logarithmique dont BF est l'axe, puisque dans cette figure les differences de differences à l'infini conservent toûjours entr'elles le même raport que les ordonnées.

Et cette figure n'avoit pas encore été remarquée.

Du centre de gravité de la Logarithmique.

Cette proprieté de la Logarithmique nous

en découvre une autre tres-singuliere, savoir que le centre de gravité *P* de la partie indéfinie *baF*, se trouve toûjours à l'extremité de la soûtangente *bY* qui répond au point de rupture *a*; puisqu'on vient de voir que le levier *bP* de la partie rompante *baF*, doit toûjours être égal à la soûtangente correspondante *bY*; d'où il suit que ce centre est toûjours également éloigné de la base, ou premiere ordonnée *ba*.

Delà il est manifeste que la Logarithmique *ABF* doit être indéfinie du côté de *F* pour être par tout également résistante, afin que *bY* soit toûjours moindre que *bF*.

D'où il est aisé d'avoir le centre de gravité *H* d'un segment de Logarithmique compris entre les deux ordonnées *BA*, *ba*; car en menant les tangentes *AG*, *aY* en *A*, *a*, on aura les centres de gravité *G*, *Y* de la Logarithmique entiere *ABF*, & de sa partie *abF*. C'est-pourquoi si l'on mene la parallele *aI* à l'axe *BF* sur *BA*, & qu'on fasse l'analogie : *Comme le reste ou segment proposé* ABba *est à la partie indéfinie* abF, *ou comme* AI *est à* ab; *ainsi réciproquement la distance* GY=Bb (*à cause que* BG=BY) *à un quatriéme terme*, *il viendra* GH, *qui étant ôtée de* BG *donnera* BH *desirée* $=\frac{A\times BG - Ab\times bB}{AI}$.

Cette proprieté m'a paru nouvelle, ne l'ayant point vûë nulle part.

Troisiéme article. Voici maintenant plusieurs exemples des points de rupture des figures tirées premierement par un poids fixe attaché à un point de leur axe.

De la Logarithmique rompuë sur une ordonnée.

1°. Si l'on suppose que la Courbe *NaA* (*Fig.* 5.) soit une Logarithmique dont *FB* soit l'asymptote, & *AB* une ordonnée sur laquelle elle soit fixée, & que le poids *M* soit suspendu au point *F* de son axe; il est aisé de voir que le point de rupture *b* sera éloigné de *F* de la valeur de la soûtangente connuë *bT*, quand on la rompra sur le plat; mais quand on la rompra en côté, alors la distance *bF* (6. *Fig.*) sera seulement la moitié de la même soûtangente, & le tiers quand on la rompra en Conoïde (*Fig.* 4.)

Des Hyperboles rompuës sur leurs asymptotes.

2°. Si la Courbe *NaA* est une 1re hyperbole (*Fig.* 7.) ayant *B* pour son centre, & *Ba*, *BF* pour ses asymptotes, on fait que la soûtangente *bT* de cette Courbe est toûjours égale à *bB*; & comme *bT* doit être egale à *bF*, quand on rompt cette figure en plan par un poids fixe *M* suspendu en *F* (*Fig.* 5.) il est évident qu'alors *bF* doit être égale à $\frac{1}{2}$ *BF*, & égale à $\frac{1}{3}$ *BF* quand on la rompt en côté (*Fig.* 6.) parce qu'alors *bF* n'est que la moitié de *bT*; & enfin quand on la rompt en Conoïde, *bF* ne doit être que le quart de *BF* (*Fig.* 4.) à cause qu'alors *bF* n'est que le tiers de *bT*.

Des Hyperboles rompuës sur des ordonnées aux axes.

3°. Si le profil *naA* (*Fig.* 5. & 8.) est encore une premiere hyperbole dont *b* soit le centre, *ba*

ba le demi-axe déterminé $= p$, & *Fb* le conjugué $= e$, on aura par la nature de cette Courbe, en supposant toûjours *M* un poids suspendu en *F*, & *BA* l'axe de rupture, & appellant *BF*, x; & *BA*, z; $z = \frac{p}{e} \sqrt{x^2 + 2e^2 - 2ex}$; d'où l'on tire la soûtangente *BT* qui répond au point $A = \frac{x^2 + 2ee - 2ex}{x - e}$ par les methodes ordinaires; laquelle étant égalée à x pour la figure rompuë à plat, donne l'équation $x^2 + 2ee - 2ex = x^2 - ex$, d'où l'on tire $2e = x = FB$; de sorte qu'en ce cas le point de rupture est à l'extremité *B* de l'axe *FB* opposée à *F*.

Mais si on la rompt en côté, égalant la soûtangente ci-dessus à $2x$, il en résulteroit $x^2 = 2ee$ & $x = e\sqrt{2} = FB$.

Enfin si on la rompt en Cylindroïde, on égalera la même soûtangente à $3x$, ce qui donnera $2x^2 - ex = 2ee$, & enfin $x = e \times \overline{\frac{1}{4} + \sqrt{17}} = FB$.

On trouvera de même qu'attachant le poids au centre *b*, la rupture faite sur le chan se trouvera encore en *BA* à l'extremité du demi-axe conjugué, & qu'en rompant en Cylindroïde, l'axe de rupture *BA* sera éloigné de *b* de la quantité $\frac{e}{\sqrt{2}}$.

Des Trapeses & des Arbres rompus par le vent.

4°. Supposons encore que *FaAQO* soit un trapese (*Fig.* 9.) dont *OF*, *QA* soient les deux cô-

côtés perpendiculaires à l'axe *OQ*, & qui soit rompu en côté par un poids suspendu en *F* ou *O*, soit *Pba* l'axe de rupture, & *ABQ* la base dans laquelle il est retenu; il est constant que si l'on prolonge le côté oblique *AF* sur l'axe en *Z*, *PZ* sera la soûtangente par le point de rupture *a*, laquelle doit être alors double du levier *PO*, donc *OP* est égale alors à $OZ = \frac{FO \times FB}{BA}$.

Mais si on le rompt en cône tronqué qui soit tiré & retenu de même; alors la soûtangente *PZ* devra être triple de *PO*, ou *OZ* double de *OP*, donc *OP* sera $= \frac{FO \times FB}{2BA}$.

Ce Problême est encore un de ceux du Memoire de 1704, on y regarde le tronc d'un arbre depuis la terre jusqu'au centre d'impression du vent contre la touffe de son feuillage, comme le cône tronqué *OFAQ*; *O* represente ce centre, & *AQ* le pied de l'arbre, *BA* represente la difference de ses deux diametres en ces deux endroits, *FB* la hauteur de ce centre au-dessus de la terre, & *FO* son diametre au droit de ce centre.

A l'égard de ce trapese rompu en plan, il est évident qu'il est partout d'une égale résistance, comme le triangle même, & par la même raison, comme on l'a déja remarqué ci-devant.

On peut remarquer ici que le triangle rompu sur le chan, ou en cône par un poids fixe n'a point de point de rupture, puisque sa soûtangente est toûjours la même chose que le levier de la puissance rompante, & non-pas le

dou-

double ou le triple comme elle le devroit; cependant quand on lui ajoûte un rectangle pour en faire un trapese, il ne laisse pas d'en avoir dans ces deux cas ; ce qui sert déja d'exemple de la premiere maniere de faire avoir des points de ruptures à des figures qui naturellement n'en ont point.

Des Conchoïdes rompuës par leurs asymptotes.

5°. Si la figure *FNaA* étoit une Conchoïde (*Fig.* 10.) ayant *F* pour son sommet, *yFB* pour axe, *BA* pour asymptote, & *y* pour pole, laquelle fût retenuë par *BA* & rompuë en plan par un poids fixe *M* suspendu en *F*, en nommant *yF*, *a*; *yB*, *p*; *FB*, *c*; *Bb*, *u*; on auroit l'équation $\frac{\overline{p-u}\sqrt{c^2-u^2}}{u} = z = ba$, quand le pole *y* est du côté du sommet *F* à l'égard de *BA*, & $\frac{\overline{p+u}\sqrt{c^2-u^2}}{u} = z = ba$ lorsque *y* est de l'autre côté, ce qui donne $dz = du \times \frac{\overline{pc^2 \mp u^3}}{u^2\sqrt{c^2-u^2}}$, & la soûtangente $bY = \frac{zdu}{dz} = \frac{\overline{up \mp u} \times \overline{c^2-u^2}}{cp^2-u^3}$ qui doit être en ce cas $= c - u = Fb$; d'où l'on tire en substituant la valeur de $p = a \pm c = yP$ l'équation $u^2 + \frac{puc - pc^2}{a} = 0$, qui donne $u = \sqrt{p^2 + 4ap} - p \times \frac{c}{2a} = Bb$; & $u = c \times \sqrt{3} - 1$ quand dans le premier cas $yF = FB$ ou $a = c$: ou $u = \frac{1}{2}c$ lorsque dans le second cas $c = \frac{1}{2}a$ ou $BF = By$. Mais

Mais ſi cette figure eſt rompuë en côté, on égalera cette ſoûtangente à $2c-2u$; d'où l'on tirera l'égalité $u^3 \pm au^2 \pm cup \mp 2pc^2 = 0$, qui donne dans le premier cas $u = Bb = c$, qui marque que la rupture eſt en F, & $u = \frac{p + \sqrt{p^2 + 8pc}}{2} = Bb$ dans le ſecond cas.

Enfin ſi on rompt la même ſeconde Conchoïde en Conoïde, on égalera la même ſoûtangente ci-deſſus à $3c-3u$, ce qui donnera l'équation $u^3 - \frac{au^2 - puc + 3pc^2}{2} = 0$ à cauſe que $p = a - c$, laquelle en ſuppoſant à l'ordinaire $u = s + \frac{a}{b}$, ſe change en cette autre

$$\left\{ \begin{array}{lll} s^3 \frac{-a^2 s}{12} & \frac{-a^3}{108} & \\ \frac{-pcs}{2} & \frac{+3pc^2}{2} & = 0 \\ & \frac{-pc2}{12} & \end{array} \right\}$$ ou $s^3 - es - b =$ qui n'a

qu'une racine poſitive, ſavoir $u = \frac{a}{b} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}e^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}bb - \sqrt[2]{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}e^3}}$ lorſque $\frac{1}{4}b^2$, excede $\frac{1}{27}e^3$, les deux autres étant imaginaires. Mais ſi $\frac{1}{27}e^3$, eſt égal à $\frac{1}{4}bb$, on aura $u = \frac{a}{b} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}b}$. Enfin ſi $\frac{1}{27}e^3$ excede $\frac{1}{4}bb$, on trouvera cette racine poſitive au moyen des analogies ſuivantes.

{ Comme $\sqrt{\frac{e}{3}}$ eſt à $\frac{b}{\frac{2}{3}}$, ainſi le ſinus total
des tables du cercle à un quatriéme terme,

qui

qui sera le sinus d'un arc dont on prendra les $\frac{2}{3}$ qu'on ajoûtera à 120 degrez, pour faire la seconde analogie:

Comme le sinus total est à la corde de la somme trouvée; ainsi $\sqrt{\frac{c}{3}}$ à un quatriéme terme,

qui sera la valeur desirée, à laquelle on ajoûtera $\frac{1}{3}a$.

A l'égard de la premiere Conchoïde rompuë en Conoïde, son point de rupture est à son sommet, comme quand on la rompt en côté.

6. Voici aussi quelques exemples des Courbes qu'il faut augmenter d'un rectangle pour leur faire avoir un point de rupture, en les tirant par un poids fixe.

D'un Quart de Cercle augmenté d'un rectangle rompu sur une Tangente.

Premierement soit *FNaA* un quart de cercle (*fig.* 11.) dont *FB*, *AB*, soient deux tangentes par ses extremitez faisant un angle droit dans leur rencontre *B*, soit *FOQB* un quarré appliqué à *FB*, on suppose cette figure retenuë dans sa bâse *AQ* & tirée en plan par un poids appliqué en *F*. Appellant *FB*, *FO*, c; *Fb*, x; & *ba*, u; on aura $Fb = x = \sqrt{2cu - u^2}$, & $u = c - \sqrt{c^2 - x^2} = ba$, & $du = \frac{xdx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$; ce qui donnera la soûtangente $\frac{\overline{u + c} \times dx}{du} = PT = \frac{\overline{2c - \sqrt{c^2 - x^2}} \times \sqrt{c^2 - x^2}}{x}$ qu'il faut égaler au levier

OP

$OP = x$, d'où l'on tirera l'égalité $4x^2 = 3c^2$, & $x = \frac{c}{2}\sqrt{3}$, qui donne l'arc *Fa* de 60 degrez précisement.

Mais si on rompt la même figure sur le chan, en la retenant, & tirant comme ci-dessus, & les mêmes dénominations subsistant; on aura (en égalant la soutangente *PT* à $2x$) l'égalité $x^4 + 6c^2x^2 = 3c^4$. D'où l'on tire $x = c\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$.

Enfin si on rompt la même figure en Conoïde, tout demeurant au reste le même, on égalera la soûtangente *PT* à $3x$; ce qui donnera l'égalité $x^4 + 2x^2c^2 = \frac{3}{4}c^4$, qui donne (*même fig.*) $x = c\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{7} - 1}$.

De la Parabole rompuë sur une Tangente par son sommet.

2. Si la figure *FaA* est une parabole (*même fig.*) sur la tangente *FB* par son sommet *F*, qui soit retenuë par son ordonnée *BA*, & rompuë en plan par un poids fixe attaché en *F*, à laquelle on ait ajoûté le rectangle *FOQB* dont la largeur *FO* soit égale au parametre $= p$. Soit toûjours $Fb = OP = x$, $ba = z$, on aura par la nature de cette Courbe $\frac{x^2}{p} = z$, & $\frac{2xdx}{p} = dz$, ce qui donnera la soûtangente *PT* prise sur $OQ = \frac{z + pdx}{dz} = \frac{x^2 + p^2}{2x}$, qu'il faut égaler à $PO = x$; ce qui donne l'égalité $p^2 = x^2$, & $p = x$; de sorte que l'axe de rupture *Pba* est alors

alors éloigné du sommet F, ou du poids M, de la valeur du parametre.

Mais si on rompt cette figure en côté, il faudra alors égaler $\frac{x^2+p^2}{2x}$ à $2x$; ce qui donnera l'égalité $p^2=3x^2$, & $\frac{p}{\sqrt{3}}=\frac{p\sqrt{3}}{3}=x$.

Enfin si l'on rompt la même figure en Conoïde, tout le reste demeurant égal, on égalera la même soûtangente $\frac{x^2+p^2}{2x}$ à $3x$; ce qui donnera $p^2=5x^2$, & $\frac{p}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}p=x$.

De la Cissoïde rompuë sur une Ordonnée par son centre.

3. Si de plus *FaA* (*même figure*) est une Cissoïde dont F soit le sommet, FB l'axe, B le centre, BA une ordonnée par ce centre, par laquelle elle soit, si l'on veut, retenuë, ou par une parallele à QBA encore plus éloignée de F; tandis qu'elle est tirée en plan par un poids constant appliqué en F, & que $OFBQ$ soit encore un quarré appliqué à l'axe FB: appellant toûjours Fb, x; $FB=FO$, c; on aura par la nature de cette Courbe $ba=u=$ $=\frac{x^2}{\sqrt{2cx-x^2}}$; dont la differentielle $du=$ $=\frac{\overline{3cx-x^2}\times dx}{\sqrt{\overline{2c-x}^3\times x}}$: d'où l'on tire la soûtangente $PT=\frac{\overline{x^2+c}\sqrt{2cx-x^2}\times\overline{2c-x}}{3cx-x^2}$, qui étant égalée à $PO=x$, donne l'équation $x^3=\overline{2c-x}^3$, &

& enfin $c=x$; de ſorte qu'en ce cas la rupture ſe fera par le centre B,

Si la Ciſſoïde eſt rompuë en côté, tout le reſte demeurant le même, on égalera la ſoûtangente PY ci-deſſus à $2x$, ce qui donnera l'équation $\overline{2c-x}^5 \times c^2 = \overline{4c x}^2 \times x^3$, d'où l'on tire $x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, en ſuppoſant $c=1$, d'où l'on tire $x = \frac{6141}{1000} \times c$ ſe réduit à $S^5 + S^3 - 4S^2 - 2 = 0$, d'où l'on déduit $x = \frac{38,918,199}{64,000,000} \times c$.

Enfin ſi l'on rompt cette Courbe en Conoïde, on aura en égalant la même ſoûtangente ci-deſſus à $3x$, l'équation $x^3 \times \overline{7c-2x}^2 = \overline{2c-x}^3 \times c^2$, d'où l'on tire l'égalité $x^5 - 7x^4 + \frac{25x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$, en ſuppoſant $c=1$, ce qui donne $x = \frac{2633}{1000} \times c$. ſe réduit à $S^5 + S^3 - 7S^2 - 3c = 0$, qui donne enfin $x = \frac{58,983}{128,000} \times c$.



